EAMAC	Concours EAMAC 2024	Cycle : INGENIEUR

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

EXERCICE 1

a) Établir $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\mathrm{dt} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{dt}$.

b) En déduire que $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que a est une valeur propre non réelle de A et Z un vecteur propre associé appartenant à $\mathbb{C}^n$.

On note X et Y les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de Z.

a) Montrer que X et Y sont non colinéaires.

b) Montrer que le sous-espace engendré par X et Y est stable par f.

c) On suppose que la matrice de f est donnée par

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer tous les plans stables par f.

EXERCICE 3

1. Donner la nature et la somme des séries de terme général
   $u_n = 1/n(n+1)$; $v_n = (-1)^{n+1}(2n+1)/n(n+1)$
2. Soit la série de terme général
   $U_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\ \ (n \geq 1)$
   Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série de terme général U_n converge et dans ce cas calculer sa somme.

EXERCICE 4

Soient E un IR-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E Vérifiant

$f^3 + f = 0$.

a) Montrer que l'espace Im(f) est stable par f.
b) *Pour x appartenant à Im(f), calculer $f^2(x)$.*
c) *Soit g l'endomorphisme induit par f sur Im(f).* Montrer que g est un *isomorphisme.*
d) En déduire que le rang de l'endomorphisme f est un entier pair.