

	Concours EAMAC 2022	Cycles : INGENIEUR et EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE
---	--	--

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P(X)$ de A .
2. Calculer $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
3. En déduire si A est diagonalisable.
4. On note $t_n = \text{tr}(A^n)$ où tr désigne la trace. Exprimer t_n en fonction de t_{n-1} , t_{n-2} , t_{n-3} .
5. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 2 : (5 points)

Soit z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{1}{2}(\sin \theta + i(1 - \cos \theta)) \text{ où } \theta \text{ est un réel de } [-\pi, \pi]$$

1. Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de z .
2. Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de $-i$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le point M d'affixe $z - i$.

Déterminer la nature géométrique de l'ensemble décrit par le point M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 3 : (5 points)

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$

Exercice 4 : (5 points)

Soit $f(x, y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y$

1. Etudier les extrema locaux de f
2. Quelle est l'image par f de $\mathbb{R}^2$?

	Concours EAMAC 2022	Cycles : INGENIEUR et EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE
---	--	--

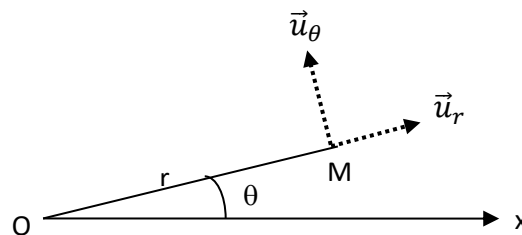
Epreuve de : Physique

Durée : 04 heures

Exercice 1 (5 points)

Le mouvement d'un point matériel M dans un plan est défini par les équations paramétriques suivantes : $r(t) = r_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$; $\theta(t) = \frac{t^2}{\tau^2}$ où r_0 et τ sont deux constantes positives.

On appellera $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}_\theta$ le vecteur qui lui est directement perpendiculaire (voir figure).



- 1- Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ ainsi que son module. **(1 pt)**
- 2- Evaluer l'angle entre le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire en M et le vecteur unitaire radiale. Que peut-on dire de cet angle ? **(1 pt)**
- 3- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M)$. En déduire ses composantes tangentielle et normale dans la base de Serret-Frenet $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{b})$. **(1 pt)**
- 4- Calculer le rayon de courbure ainsi que le centre de courbure de la trajectoire à l'instant t. **(2 pt)**

Exercice 2 (5 points)

Un moteur fonctionne en suivant le cycle de transformations réversibles suivant :

- État 1 à l'état 2 : Compression adiabatique
- État 2 à l'état 3 : Compression isochore
- État 3 à l'état 4 : Détente adiabatique
- État 4 à l'état 1 : Refroidissement isochore

On suppose que le cycle est étudié pour une mole d'air assimilé à un gaz parfait.

1. Tracer le diagramme (P, V) du cycle
2. Déterminer V_1 et V_2 si $V_1 = 7 V_2$
3. Calculer P_2 et T_2
4. Calculer les quantités de chaleur échangées au cours de chacune des transformations en fonctions des températures T_1, T_2, T_3, T_4 . Commenter et calculer leurs valeurs numériques
5. Évaluer le travail fourni à l'air au cours du cycle en utilisant le premier principe
6. Déterminer le rendement du cycle

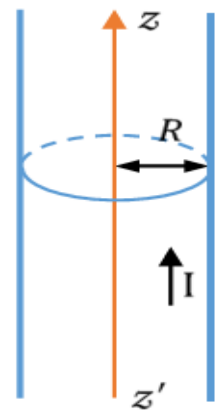
On donne : $\gamma = 1,4$; $C_p = 29 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$; $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$

	État 1	État 2	État 3	État 4
Pression [Pa]	10^5		$62 \cdot 10^5$	$4,08 \cdot 10^5$
Température [$^\circ\text{K}$]	300		$2,65 \cdot 10^3$	$1,63 \cdot 10^3$

Exercice 3 (5 points)

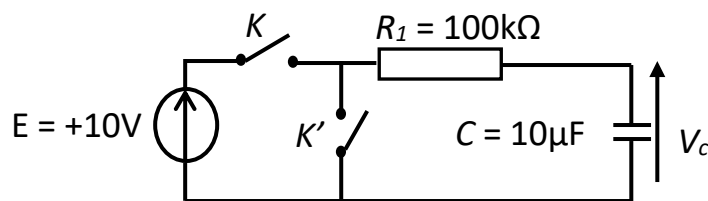
Un cylindre conducteur de conductivité γ , de rayon R , de longueur h , est considéré comme infiniment long et est parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti dans la direction de l'axe, d'intensité I .

- 1- Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace. **(1pt)**
- 2- Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace. **(1pt)**
- 3- En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat. **(3pts)**



Exercice 4 (5 points)

Le circuit représenté ci-dessous fait apparaître un condensateur C dont la charge est possible à la fermeture de l'interrupteur K . A $t = 0$, on considère le condensateur déchargé, on ferme alors K .



- 1) Sans aucun calcul, préciser quelles sont les valeurs de $v_c(0)$, $v_c(\infty)$, $i_c(0+)$, $i_c(\infty)$. **(2pts)**
- 2) En utilisant les lois fondamentales des circuits, écrire l'équation différentielle qui en découle sous la forme qui vous semble la plus adaptée au problème (pour $t \geq 0$). **(1pt)**
- 3) Résoudre cette équation et écrire l'expression de $v_c(t)$ et $i_c(t)$. **(1pt)**
- 4) Représenter ces deux grandeurs sur un graphique en fonction du temps et retrouver les résultats de la question 1. Préciser quelle est la valeur de la tension v_c à $t = 0,1s$, $t = 1s$, $t = 10s$. Conclure. **(1pt)**

Concours EAMAC 2021	Cycles : INGENIEUR et EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
------------------------	---	-------------------------------

Durée : 04 heures

Exercice 1 (5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \exp(i \frac{2\pi}{n})$ et on considère la matrice carrée M , d'ordre n , dont le terme général situé sur la ligne p et la colonne q est :

$$m_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$$

- 1) Calculer M^2 .
- 2) En déduire $|\det(M)|$

Exercice 2 (5 points) : On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5 u_{n+1} - 6 u_n$$

On note $(a_n), (b_n)$ les éléments de E définis par : $(a_0 = 1, a_1 = 0), (b_0 = 0, b_1 = 1)$,

et on note $r = (2^n), s = (3^n), n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que (a_n, b_n) et (r, s) sont des bases de E .
2. Déterminer la matrice M de la famille (a_n, b_n) dans la base (r, s) de E et calculer M^{-1}
3. Montrer que l'application f qui à tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E associe $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

est un endomorphisme de E , et préciser la matrice de f dans la base (a_n, b_n) de E et la matrice de f dans la base (r, s) de E .

Exercice 3 (5 points)

1. Donner une décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x^2+2x}$
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x \ln(|x|).$$

- 1) Etudier les variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.
- 2) Etudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

- 3) En déduire la convergence de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0=3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

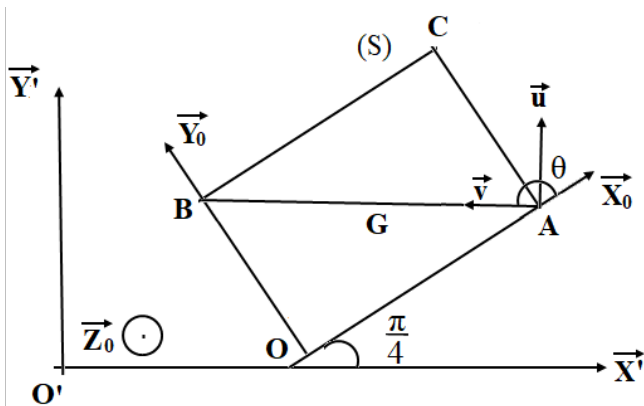
Concours EAMAC 2021	Cycles : INGENIEUR et EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE	EPREUVE DE : PHYSIQUE
------------------------	---	--------------------------

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5 points)

Dans la plan vertical $(\overrightarrow{O'X'}, \overrightarrow{O'Y'})$ d'un repère galiléen orthonormé direct $R'_0(O', \overrightarrow{X'}, \overrightarrow{Y'}, \overrightarrow{Z_0})$, soient deux axes orthogonaux $\overrightarrow{OX_0}$ et $\overrightarrow{OY_0}$ d'un repère orthonormé direct galiléen $R_0(O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ tels que $\overrightarrow{OX_0}$ fasse un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'horizontal de ce plan.

Un solide (S) homogène, de centre d'inertie G et de masse m, ayant la forme d'un segment de droite AB de longueur 2a, est mobile dans ce plan de façon que A (respectivement B) se déplace sans frottement sur $\overrightarrow{OX_0}$ (respectivement sur $\overrightarrow{OY_0}$). On pose $\theta = (\overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{AB})$ et on définit le point C par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ (ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$).



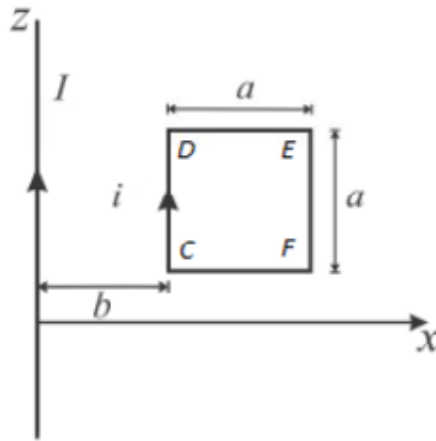
On introduit aussi un autre repère orthonormé direct $R(A, \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{Z_0})$ lié au solide (S) et obtenu à partir de R_0 par une rotation angle $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ autour de l'axe $\overrightarrow{OZ_0}$.

1. Déterminer le vecteur rotation instantanée, $\vec{\Omega}(R/R_0)$, de (S) par rapport à R_0 .
2. Déterminer les éléments de réduction du torseur cinétique, $\Omega[\vec{R}_v, \vec{\sigma}_c(S/R_0)]$ en C de (S).
3. Déterminer les éléments de réduction du torseur dynamique, $A[\vec{R}_a, \vec{\delta}_c(S/R_0)]$ en C de (S).

Exercice 2 : (5 points)

Un fil infiniment long, d'axe Oz, est parcouru par un courant I . Un circuit carré CDEF, de côté a et de coefficient d'auto-inductance L négligeable, est placé dans le plan xOz.

1. Calculer le champ magnétique créé par le fil infini en un point M situé à la distance b du fil.
2. Déterminer par calcul direct la force de Laplace exercée par le fil sur la spire carrée.
3. Déterminer le flux du champ magnétique créé par le fil infini à travers la spire. En déduire une nouvelle détermination de la force de Laplace exercée sur le cadre carré.



Exercice 3 : (5 points)

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique $\vec{E}(M,t)$ et magnétique $\vec{B}(M,t)$.
2. On suppose que le champ électrique est de la forme: $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$.
 - 2.1 Quel est l'état de polarisation de cette onde?
 - 2.2 Quelle est la structure de cette onde?
 - 2.3 Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$.
 - 2.4 Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$.
3. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4 \text{ mm}^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $P = 10 \text{ W}$. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

Données utiles :

Permittivité diélectrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Célérité de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 4 : (5 points)

On considère un gaz diatomique, supposé parfait, contenu dans un cylindre horizontal, fermé par un piston qui se déplace sans frottement. A l'état initial, le gaz a une température $T_o = 300 \text{ K}$, un volume $V_o = 1 \text{ l}$, une pression $P_o = 10^5 \text{ pascals}$.

1- On fait subir à ce gaz, une compression isotherme, jusqu'à atteindre la pression $P_1 = 10P_o$. Calculer le volume final et les échanges de travail et de chaleur du gaz avec le milieu extérieur.

2- On détend le gaz adiabatiquement, de façon réversible, de manière à le ramener à sa pression initiale. Calculer à la fin de cette détente :

a) le volume final du gaz.

b) l'abaissement de température ΔT .

c) le travail fourni par le gaz et sa variation d'énergie interne.

On donne $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$

3- Le gaz est enfin ramené aux conditions initiales (P_o, V_o, T_o) à pression constante. Déterminer au cours de cette transformation :

a) la variation d'énergie interne.

b) le travail et la chaleur échangés avec le milieu extérieur.

N.B. : Les expressions littérales seront données, pour toutes les questions, en fonction de P_o, V_o, T_o, P_1 et γ .

S-MI-1

Concours EAMAC 2019	Cycle INGENIEUR	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
--------------------------------	------------------------	---------------------------------------

Durée : 04h**S-MI-1.1 (5 points) :**

Soit $\star$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par $x \star y = x + y - xy$.

1. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative.
2. Montrer que la loi $\star$ admet un élément neutre e que l'on précisera.
3. Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet pour inverse $x/(x-1)$.
4. L'ensemble $(\mathbb{R}, \star, e)$ est-il un groupe ?
5. L'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \star, e)$ est-il un groupe ?

S-MI-1.2 (5 pts) :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (x, -3y+4z, -2y+3z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Calculer $f \circ f$.
5. En déduire l'expression de f^{-1} .

S-MI-1.3 (5 pts)

Etudier la convergence et calculer la somme des séries dont les termes généraux sont définis par :

1) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$

2) $v_n = \frac{n+4}{n(n^2-4)} \quad (n \geq 3)$

$$3) \quad w_n = \frac{n^3}{n!} \quad (n \geq 1)$$

S-MI-1.4 (5 pts)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 2-k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

où k est un réel.

- 1) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
- 2) Pour $k=2$, calculer l'exponentielle de la matrice A et A^n où $n \geq 1$ est un entier naturel.

S-PI-1

Concours EAMAC 2019	Cycle INGENIEUR	EPREUVE DE : PHYSIQUE
------------------------	-----------------	--------------------------

Durée : 04h

S-PI-1.1 (5 points)

Soit un mobile M se déplaçant sur une branche d'hyperbole dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + \frac{a}{x(t)}\vec{j}$, avec a constante positive et $x(t) = at$.

- 1- Déterminer les vecteurs unitaires de **Serret-Frenet** en fonction des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ **(2,5 pt)**
- 2- Calculer le rayon de courbure $\rho(t)$ et le centre de courbure C. **(2 pt)**
- 3- Tracer l'hodographe **(0,5 pt)**

S-PI-1.2 (5 pts)

Une transformation polytropique est une transformation quasi statique vérifiant PV^k constante.

1. Calculer le travail des forces de pression pour un gaz parfait subissant une transformation polytropique entre (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction des pressions et volumes ainsi que de k. **(1 pt)**
2. On note $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ qui est une constante pour un gaz parfait. Trouver une expression de la quantité de chaleur échangée au cours de la transformation précédente de la forme $C(T_1 - T_0)$ où C est une constante à déterminer. **(1,5 pt)**
3. Donner une interprétation physique de C. **(0,5 pt)**
4. Etudier en les interprétant physiquement les cas suivants : $k = \gamma, k = 0, k \rightarrow +\infty$, et $k = 1$. **(2 pt)**

S-PI-1.3 : (5 pts)

Pour dévier le faisceau d'électrons d'un tube cathodique, on utilise deux bobines circulaires plates de rayons R disposées suivant la figure ci-dessous (figure 2 et 3). En supposant que l'induction B créée par les bobines est uniforme dans le carré qui a pour coté le diamètre des bobines et que sa valeur est celle qui existe au point O (sur l'axe Ox).

- 1- Déterminer la trajectoire décrite par l'électron (1pt)
- 2- Déterminer l'angle au centre qui intercepte l'arc décrit (2pts)

- 3- Déterminer la distance PP' (figure1) qui sépare le point P du point P' où l'électron sort de la zone d'action de l'induction B (1pt)
- 4- Le déplacement subi par le point d'impact des électrons sur l'écran lorsque le courant I parcourt les bobines. (1pt)

La distance de l'écran au point P est de 0,2m

On donne : Distances des centres des bobines à l'axe du tube $d = R = 5\text{cm}$

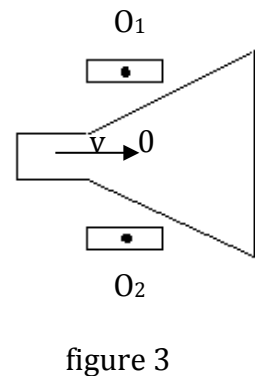
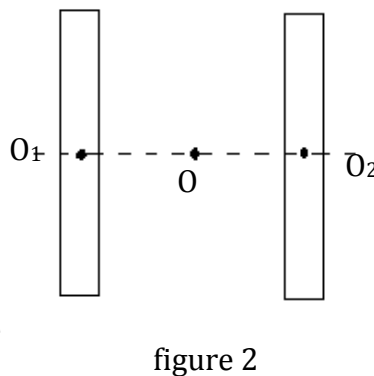
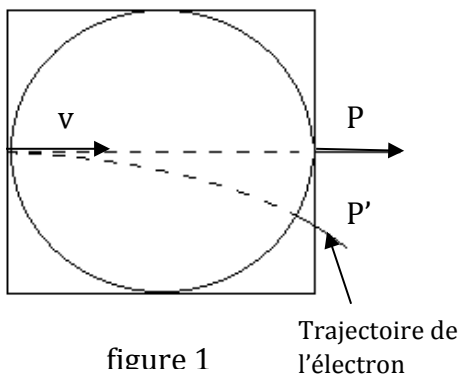
Vitesses constantes des électrons $v = 1000\text{km.s}^{-1}$

Nombre de spires des bobines $N = 400$

Courant dans les bobines $I = 5\text{mA}$

Charge de l'électron $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$

Masse de l'électron $m = 0,9 \cdot 10^{-30}\text{kg}$

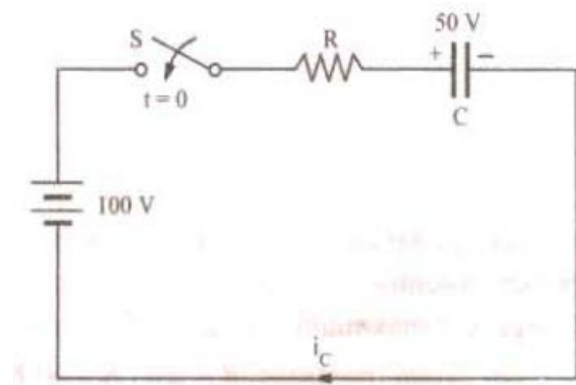


S-PI-1.4 : (5 points)

Dans un circuit RC représenté par la figure suivante ; $R = 2\text{M}\Omega$ et $C = 5\mu\text{F}$

Le condensateur est initialement chargé et possède une tension de 50V entre ces bornes.

Si on ferme l'interrupteur S à l'instant $t=0$, calculer :



- 1- La constante de temps pour la charge de condensateur.
- 2- La tension aux bornes du condensateur après un laps de temps $t = 5\lambda$.
- 3- La tension aux bornes de C si on change la polarité du condensateur.
- 4- Les temps de charge pour que $V_C = -10\text{V}$, $V_C = 0\text{V}$ et $V_C = 95\text{V}$.

S-MI-1

Concours EAMAC 2018	Cycle INGENIEUR	MATHEMATIQUES
------------------------	-----------------	---------------

Exercice S-MI1.1 (5 points):

Soit (p, q) appartenant à $\mathbb{C}^2$. On note x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + pX + q$ dans $\mathbb{C}$ de sorte que

$$X^3 + pX + q = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

On note : $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

On note, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$: $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$

- 1) Montrer que $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$ et $\sigma_3 = -q$.
- 2) a) Calculer S_0, S_1, S_2 en fonction de p et q .
b) Etablir que, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, $S_{k+3} + pS_{k+1} + qS_k = 0$
c) En déduire S_3 et S_4 en fonction de p et q .
- 3) Calculer $A = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2$ en fonction de p et q .

Exercice S-MI1.2 (5 points):

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_2(\mathbb{R})$,

$\phi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, définie par $\phi(M) = AMB$.

- a. Vérifier que ϕ est linéaire.
- b. Montrer que ϕ est bijective et déterminer ϕ^{-1} .
- c. Montrer que $B = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$, déterminer les matrices de ϕ et ϕ^{-1} dans B .

Exercice S-MI1.3 (5 points) :

Soit a un nombre réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

1. Montrer que si $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Que peut-on dire de l'hypothèse $\lim_{-\infty} f'(x) = -\infty$?

On suppose à présent que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x)$ est strictement positif.

3. Soit $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que :

$$\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{et que} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{diverge.}$$

Montrer que $\lim_{+\infty} \frac{\int_a^{+\infty} g(x)dx}{\int_a^{+\infty} f(x)dx} = 0$.

Exercice S-MI1.4 (5 points) :

Soit α un nombre réel qui n'est pas entier et soit f une fonction de 2π -périodique, définie sur $\mathbb{R}$, et telle que

$$f(t) = \sin \alpha t \quad \text{pour} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction f . La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
2. On considère à présent la fonction g , 2π -périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$g(t) = \cos \alpha t \quad \text{pour} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction g . La fonction g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

3. A partir des séries de Fourier de f et de g , expliciter la série de Fourier complexe de la fonction h , 2π -période, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$h(t) = e^{i\alpha t} \quad \text{pour} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

4. En déduire l'égalité : $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha-n)^2}$.

S-PI-3

Concours EAMAC 2018	Cycle INGENIEUR	PHYSIQUE
------------------------	-----------------	----------

Exercice S-PI3.1 (5 points)

Dans le plan (Oxy), le mouvement d'un point P est déterminé par les équations paramétriques:
 $x = v_0 t \cos(\alpha)$, $y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$ où v_0 est la vitesse initiale de P et α est l'angle que fait v_0 avec l'axe Ox.

- 1- Quelle est la nature de la trajectoire ? **(1 pt)**
- 2- Déterminer : **(3,5 pt)**
 - a) Les accélérations normales et tangentielles.
 - b) Le rayon de courbure $\rho(t)$ ainsi que le centre de courbure C(t)
 - c) Les expressions des vecteurs unitaires de **Serret-Frenet**.
- 3- Trouver l'angle entre les vecteurs vitesses et accélérations au point où la trajectoire recoupe l'axe Ox. **(0,5 pt)**

Exercice S-PI3.2 (5 points)

Une mole de gaz parfait ($\gamma = 1,4$) subit la succession de transformations suivantes :

- détente isotherme de $P_A = 2 \text{ bar}$ et $T_A = 300 \text{ K}$ jusqu'à $P_B = 1 \text{ bar}$, en restant en contact avec un thermostat à $T_T = 300 \text{ K}$;
- évolution isobare jusqu'à $V_C = 20,5 \text{ L}$ toujours en restant en contact avec le thermostat à T_T ;
- compression adiabatique réversible jusqu'à l'état A.

1. Calculer V_B et représenter ce cycle en diagramme (P, V). S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ? **(1 pt)**
2.
 - a) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{AB} du gaz entre A et B. **(0,5 pt)**
 - b) Déterminer l'entropie $S_{\text{éch}}$ échangée avec le thermostat. **(0,75 pt)**
 - c) En déduire l'entropie créée $S_{\text{créée}}$. Conclure **(1,25 pt)**
3. Calculer la température en C, le travail W_{BC} et la quantité de chaleur Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC. Calculer l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que la variation d'entropie du gaz entre B et C. **(0,75 pt)**

4. Calculer la valeur numérique de l'entropie créée au cours du cycle. Le cycle proposé est-il réalisable ? (0,75 pt)

EXERCICE S-PI3.3 :

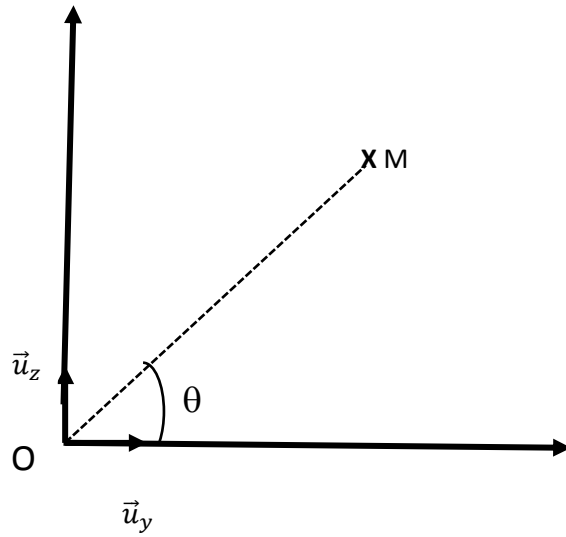
On considère une onde électromagnétique plane, progressive, sinusoïdale et monochromatique de pulsation ω , se propageant dans le vide de perméabilité magnétique μ_0 . L'espace est rapporté à un repère cartésien Oxyz de base orthonormée. L'onde se propage dans le plan yOz le long d'un axe faisant un angle θ avec la direction Oy. Le vecteur champ électrique a comme expression :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \vec{u}_x$$

1. Ecrire dans la base orthonormée Oxyz les composantes k_y et k_z du vecteur d'onde $\vec{k}$ au point M de coordonnées (x,y,z) tel que $\vec{r} = \vec{OM}$ et à l'instant t en fonction de son module k et de θ . (1pt)
2. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide. (1pt)
3. Écrire dans la base orthonormée Oxyz les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point M à l'instant t . En déduire, à l'aide des équations de Maxwell dans le vide, les composantes du vecteur champ magnétique de l'onde $\vec{B}$ au point M . (1pt)
4. Représenter les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$. (1pt)
5. Déterminer en notation réelle les composantes du vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

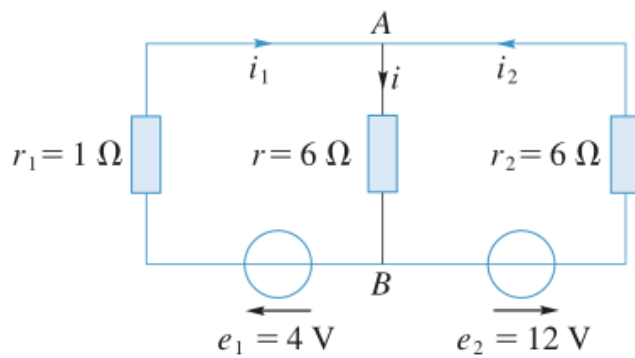
associé à l'onde électromagnétique en fonction de E_0 , μ_0 , $\vec{k}$ et ω .



Exercice S-PI3.4 (5pts)

Déterminer le courant i en utilisant deux des trois lois ci-dessous :

- les lois de Kirchhoff ;
- en remplaçant les deux générateurs de Thévenin par les générateurs de Norton équivalents.



S-MI6

Concours EAMAC 2017	Cycle INGENIEUR KAMERPOWER.COM	MATHEMATIQUES
--------------------------------	--	----------------------

Exercice S-MI6-1 : (5 points)

Soit a un nombre réel. On définit la fonction f_a d'une variable réelle t telle que

$$f_a(t) = \frac{1}{a^2 - 2a \cos t + 1}.$$

- 1) Montrer que f_a est définie pour tout t réel si et seulement si $|a| \neq 1$.
- 2) On suppose que $a \neq 0$ et $|a| \neq 1$. Calculer $f_{\frac{1}{a}}$ en fonction de f_a .
- 3) On suppose $a = \frac{1}{2}$. Etudier $f_{\frac{1}{2}}$.
- 4) On suppose $|a| \neq 1$. Calculer $F_a(x) = \int_0^x f_a(t) dt$.

Exercice S-MI6-2: (4 points)

On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2+n^2}{n!}$

Exercice S-MI6-3: (5 points)

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre $n > 0$, non nulle. Si A est nilpotente, on appelle indice de nilpotence de A l'entier k défini par $k = \inf \{r \in \mathbb{N}^* \mid A^r = 0\}$.

- 1) Montrer que $k \leq n$
- 2) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A^n = 0$
- 3) On suppose dans cette question que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est triangulaire supérieure stricte : c'est dire que $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$. Montrer que A est nilpotente.
- 4) On donne la matrice d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

KAMERPPOWER.COM

Trouver une matrice nilpotente B telle que $A = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.

Calculer B^m pour m entier, $m > 0$ et en déduire A^m

Exercice S-MI6-4: (6 points)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

1. Calculer A^2 en fonction de A . En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression de A^n en fonction de A . Trouver le polynôme minimal
2. Calculer $\dim(\text{Ker } f)$ et en déduire que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique de A
3. Trouver une base B' de vecteurs propres de f

Concours EAMAC 2017	Cycle INGENIEUR	PHYSIQUE
--------------------------------	------------------------	-----------------

Exercice S-PI5-1 (5pts)

Un point matériel de masse m se déplace dans le plan xOy de façon que son vecteur position soit donné par :

KAMERPOWER.COM

$$\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$$

où a et b sont deux constantes positives telles que $a > b$

1-a- Montrer que le point matériel se déplace sur une ellipse.

1-b- Montrer que la force agissant sur le point matériel est en tout point dirigée vers l'origine.

1-c- Montrer que cette force dérive d'un potentiel, soit $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, dont on déterminera l'expression.

2- a- Calculer l'énergie cinétique du point matériel aux points A ($a, 0$) et B ($0, b$).

2-b- Calculer le travail fourni par le champ de force en déplaçant le point matériel de A à B.

2-c- Montrer que le travail total, effectué en faisant faire au point matériel une fois le tour de l'ellipse, est nul.

2-d- En utilisant le résultat de la question (c), calculer l'énergie potentielle aux points A et B.

2-e- Calculer l'énergie totale du point matériel et montrer qu'elle est constante, en d'autres termes, démontrer le principe de la conservation de l'énergie.

Exercice S-PI5-2 (5pts)

Un faisceau laser émet une onde plane monochromatique, polarisée rectilignement selon Oz , qui se propage dans le plan Oxy suivant une direction inclinée de 60° par rapport à Ox .

1. Ecrire les composantes du vecteur d'onde du champ électromagnétique et du vecteur de Poynting.

2. Calculer leurs normes dans le cas d'un laser argon ionisé ($\lambda = 488 \text{ nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de 1 mm^2 et de puissance moyenne 1 W .

Donnée : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ S.I.}$

Exercice S-PI5-3 (5pts)

Un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) décrit de façon réversible, sans changer d'état, un cycle de Carnot récepteur selon les caractéristiques suivantes (les valeurs numériques non données seront à calculer au 2) : $n = 0,01$ mol.

État 1 $P_1 = 1\,000$ hPa	État 2 $P_2 = 1\,600$ hPa	État 3 $P_3 = 920$ hPa	État 4 $P_4 = 575$ hPa
$V_1 = 0,24$ L	$V_2 = ?$	$V_3 = ?$	$V_4 = ?$
$T_1 = ?$	$T_2 = ?$	$T_3 = ?$	$T_4 = ?$

Transformations	1-2 : isotherme	2-3 : adiabatique	3-4 : isotherme	4-1 : adiabatique
-----------------	-----------------	-------------------	-----------------	-------------------

- 1- a) Donner une définition du gaz parfait macroscopique.
b) Donner la définition de γ et préciser les facteurs dont il dépend.
- 2- a) Calculer les valeurs des volumes et des températures inconnues (la constante des gaz parfaits est $R = 8,32$ SI).
b) Donner l'aspect du graphe $P = f(V)$, dit diagramme de Clapeyron du cycle.
- 3- Calculer pour chaque transformation le travail W mis en jeu.

KAMERPOWER.COM

Exercice S-PI5-4 (5pts)

On fait subir à une mole de gaz parfait quatre transformations, à partir de l'état initial (P_1, V_1, T_1) :

- 1-2 : une compression isotherme l'amène dans l'état (P_2, V_2, T_2)
- 2-3 : un échauffement isobare l'amène dans l'état (P_2, V_3, T_3)
- 3-4 : une détente isotherme l'amène dans l'état (P_1, V_4, T_3)
- 4-1 : un refroidissement isobare qui le ramène dans son état initial (P_1, V_1, T_1)

On donne : $P_1 = 10^5$ Pa, $P_2 = 5 \cdot 10^5$ Pa, $T_1 = 273$ K et $T_3 = 373$ K. On appelle C_p la capacité calorifique à pression constante du gaz, supposée constante.

- 1) Déterminer les valeurs de V_1, V_2, V_3 et V_4 .
- 2) Déterminer l'expression des quantités de chaleur Q_{2-3} et Q_{4-1} en fonction de C_p, T_1 et T_3 . 3) Déterminer l'expression des quantités de chaleur Q_{1-2} et Q_{3-4} en fonction de la constante des gaz parfaits R et de T_1, T_3, P_1 et P_2 . Donner leurs signes.

En fait le cycle ci-dessus appelé cycle d'Ericsson correspond au fonctionnement de certains moteurs d'avions.

- 4) Le rendement η de ce moteur s'écrit : $\eta = 1 + \frac{Q_{1-2}}{Q_{3-4}}$. Calculer la valeur de η .

S-MI2

Concours EAMAC 2016	Cycle INGENIEUR	Epreuve de MATHEMATIQUES
---------------------	-----------------	-----------------------------

Exercice S-MI2-1: (6 points)

Soit k appartenant à $\mathbb{R}$ et $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ appartenant à $M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles A_k est inversible.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire que A_k est diagonalisable.
3. Quel est le polynôme minimal de A_k ?
4. Montrer pour tout entier naturel non nul n , on a $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$.

Calculer a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_k^n en fonction de n .

Exercice S-MI2-2: (4 points)

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
2. Calculer I_n

3. En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$

EXERCICE S- MI2-3 (5 points)

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt; \quad J(n) = \int_0^{\pi} (\sin t)^n dt; \quad K(n) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$J(n) = K(n) = 2I(n)$$

2. Calculer $I(0)$, $I(1)$ et $I(2)$

3. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n+2)$ et $I(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. Montrer que la suite des intégrales $(I(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante à termes positifs.

Exercice S-MI2-4 : (5 points)

On définit pour n entier naturel non nul le polynôme à coefficients réels P_n par :

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X(X+1)(X+2)}{3!} + \dots + \frac{X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)}{n!}$$

1) Déterminer explicitement les polynômes P_1, P_2, P_3 .

2) Montrer que P_n est un polynôme de degré n .

3) Soit λ_n le coefficient dominant de P_n . Démontrer que $\lambda_n = \frac{1}{n!}$.

4) Démontrer la formule $\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j = 0$

En déduire que pour tout entier k , tel que $1 \leq k \leq n$, on a $P_n(-k) = 0$

5) Factoriser P_n

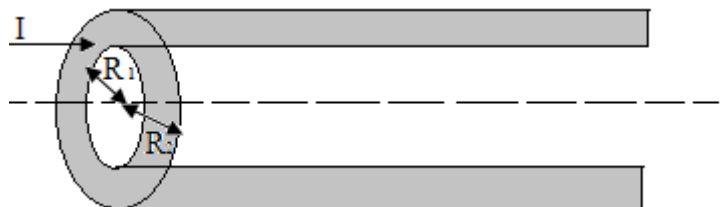
S-PI4

Concours EAMAC 2016	Cycle INGENIEUR	Epreuve de PHYSIQUE
---------------------	-----------------	---------------------

Exercice S-PI4-1 (5pts)

Un conducteur cylindrique creux, de rayons R_1 et R_2 de la figure ci-dessous est parcouru par un courant I tel que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ soit uniforme sur toute sa section et soit parallèle à l'axe du cylindre.

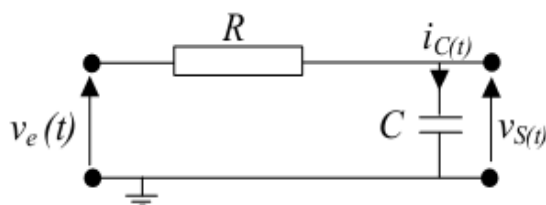
- 1- Donner la relation entre j et I .
- 2- Préciser l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ en un point M de l'espace, qu'il soit extérieur ou intérieur au cylindre.
- 3- En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace.



Exercice S-PI4-2 (6 pts)

Les circuits passifs qui utilisent des condensateurs et des inductances, lorsqu'ils sont destinés à des signaux (tensions) alternatifs, présentent des caractéristiques qui dépendent de la fréquence des signaux d'entrée. En cela, ils forment naturellement des « filtres » qui atténuent ou pas, ou « coupent » ou pas, certaines plages de fréquence. Ils ont ainsi un rôle de discrimination en fonction de la fréquence, ce qui correspond bien à une sorte de filtrage. Cette fonction est très importante en électronique et donc assez présente dans les sujets de problèmes.

Pour comprendre la notion de « filtre » prenons comme exemple simple un « filtre passe bas passif » représenté sur la figure ci-après :



- 1) Quelle équation relie la tension $v_s(t)$ et le courant $i_c(t)$?
- 2) Si on suppose que $v_s = V_{s\max} \cdot \cos(\omega t)$ quelle sera l'expression littérale de i_c ?
- 3) Que représente la valeur ω ? Par quoi est-elle fixée ?
- 4) A quoi est équivalent le circuit si ω est très petit, c'est à dire dans un domaine de « basses fréquences » ?
- 5) A quoi est équivalent le circuit si ω est très grand, c'est à dire dans un domaine de « hautes fréquences » ? Justifier alors l'appellation « passe bas ».
- 6) Montrer que l'équation de maille de ce circuit revient à :

$$v_e = RC \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t).$$

Remplacer alors v_s par sa forme sinusoïdale $v_s = V_{s\max} \cdot \cos(\omega t)$.

- 7) A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega \gg 1/RC$?
- 8) A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega \ll 1/RC$?

Exercice S-PI4-3 (5pts)

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (OPR) de pulsation ω se propage dans le vide dans la direction de l'axe Oz.

- 1- Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point de l'espace.
- 2- La valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Exercice S-PI4-4 (5pts)

Soit un point matériel repéré par ces coordonnées cylindriques ρ, φ , et z telles que : $\rho = at^2, z = at, \varphi = \omega t$, où a et ω sont des constantes.

- 1-Calculer les composantes cylindriques du vecteur vitesse.
- 2- En déduire les composantes cylindriques du vecteur accélération.
- 3- Calculer les modules des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$.

Exercice 1

1. (a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^4$ muni de l'addition et la multiplication externe est un espace vectoriel réel.
(b) Désigner au moins deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^4$
2. L'ensemble des nombres complexes est-il un espace vectoriel réel ? si oui, quels sont les vecteurs de base ?

Exercice 2

1. on donne le système
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

- (a) étudier la compatibilité de ce système
- (b) le résoudre au cas où il est compatible

2. utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

1. a) Vérifier que les fonctions $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \arctan x$ admettant les mêmes dérivées sur l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.
b) Etablir la relation qui existe entre ces fonctions.

2. calculer les limites suivantes :

(a) : $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$

(b) : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x}$

(c) : $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}$

Exercice 4

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

(b) $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx$

(c) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

(d) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

- 2) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^2 = x^3$ compris entre $x = 0$ et $x = 1$; $y \geq 0$.

CONCOURS EAMAC - mai 2015 – cycle Ingénieur - Physique

EXERCICE I : Electromagnétisme (5 pts)

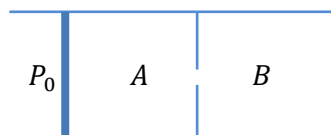
Soit une onde électromagnétique plane et progressive, de pulsation ω se propageant dans l'air qu'on assimilera au vide. Le champ magnétique $\vec{B}$ est défini par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$:

$$B_x = 0, B_y(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx), B_z = 0.$$

1. A l'aide des équations de Maxwell, calculer les composantes du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de B_0 . (3 pts)
2. Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. (1 pt)
3. Quelle est la puissance moyenne $\langle P \rangle$ rayonnée à travers une surface (S) perpendiculaire à la direction de propagation. (1 pt)

EXERCICE II : Thermodynamique (Détente irréversible d'un gaz parfait) (5 pts)

Soit le dispositif de la figure ci-contre. Les parois et le piston sont adiabatiques. La paroi interne est fixe et diatherme (elle permet les échanges thermique). Elle est percée d'un trou et fermée par une fenêtre amovible.



La pression extérieure est $P_0 = 1 \text{ bar}$. Initialement le volume A est rempli d'un gaz parfait ($P_0 = 1 \text{ bar}, T_0 = 300 \text{ K}, n = 1 \text{ mol}$) et le volume B est vide.

Le rapport des capacités thermiques du gaz γ vaut 1,4.

1. On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qui se passe suivant la taille de l'enceinte B . En déduire sans toutefois la calculer, l'existence d'un volume critique V_c de B . (1 pt)
2. On suppose que $V_B < V_c$.
 - a. On appelle V_1 le volume occupé par le gaz. Déterminer le travail reçu par le gaz. (0,5 pt)
 - b. Déterminer l'état final du gaz (P_1, V_1, T_1) en fonction de P_0, V_A et V_B . (1 pt)
 - c. Calculer l'entropie créée. Conclure. Quelle est la cause de la création d'entropie ? (1 pt)
 - d. Déterminer V_c . Effectuer l'application numérique. (0,5 pt)
3. Reprendre la question 2. dans le cas $V_B > V_c$. (1 pt)

EXERCICE III : Mécanique du point : Satellite terrestre (4,5 pts)

Dans ce problème les satellites ou engins spatiaux artificiels sont assimilés à des points matériels de masse m , et les influences perturbatrices dues aux mouvements de la Terre, supposée sphérique et homogène, à son atmosphère et aux champs de gravitation des autres composants du système solaire (soleil, planètes, ...) sont négligées.

On désigne par R le rayon de la terre et par g_0 le module du vecteur du champ de pesanteur au niveau du sol. On donne : $R = 6400 \text{ km}$; $g_0 = 10 \text{ ms}^{-2}$

1. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_1 dont dérive la force $\vec{F}$ attractive exercée par la Terre sur un engin spatial lorsqu'il se trouve à la distance r du centre O de la Terre. On admet que E_1 tend vers 0 quand r tend vers l'infini. (1 pt)

2. Si on lançait un tel engin depuis la Terre, en lui communiquant à partir du sol une vitesse initiale V_i ascendante et verticale, de façon qu'il atteigne avec une vitesse nulle un point M d'altitude h , quelle devrait alors être la relation entre cette altitude h et le module V_i de la vitesse de lancement ?

Application numérique : $h = 600 \text{ km}$. (1 pt)

3. Quelle valeur numérique minimale V_2 devrait avoir la vitesse initiale pour que l'engin s'éloigne indéfiniment ? (0,5 pt)

4. Une fois atteinte cette altitude h de la question N°2 ci-dessus, quelle devrait être la vitesse V_i qu'il faudrait communiquer à cet engin à partir du point M pour qu'il devienne un satellite circulaire d'altitude $R + h$? Préciser la direction et le module de $\vec{V}_1$.

Quelles seraient dans ces conditions :

(a) la valeur numérique de V_1 ? (0,5 pt)

(b) la période T_1 de révolution de ce satellite ? (0,5 pt)

(c) la valeur numérique du module L_1 de son moment cinétique par rapport à O et son énergie mécanique E_2 dans le cas particulier où m est de 1 tonne ? (1 pt)

EXERCICE IV: Circuit R, L, C (5,5 pts)

Soit le circuit suivant où e est une tension sinusoïdale de pulsation ω . On étudie la variation de l'impédance réelle du circuit.

1. Exprimer l'impédance complexe du circuit. (1 pt)

2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

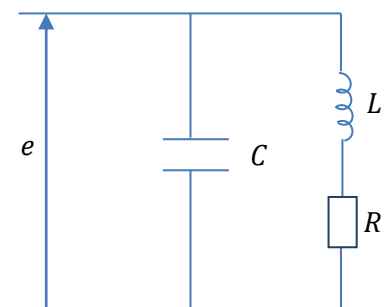
Donner l'expression de l'impédance en fonction de x , Q et R .

(1 pt)

3. Etablir l'existence d'un extremum du module de l'impédance pour certaines valeurs de Q qu'on précisera. (1,5 pt)

4. Donner l'expression de la pulsation correspondante à l'extremum. (1 pt)

5. En étudiant les limites du module de l'impédance, en déduire qu'il s'agit d'un maximum. (1 pt)



EAMAC – 2014 - SUJET M-I-5

Exercice 1 (6 points)

Soient A, B deux sous-ensembles de E , f une application définie par

$$f: P(E) \rightarrow P(A) \times P(B)$$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Démontrer que f est injective ssi $A \cup B = E$
2. Démontrer que f est surjective ssi $A \cap B = \emptyset$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 2 (6 points)

Soit A un anneau commutatif. On appelle radical de l'idéal propre I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal
2. Que se passe-t-il si $I = 0$
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \cap \sqrt{I} = \sqrt{I}$
4. Quel est le radical d'un idéal premier $\mathcal{J}$?
5. Déterminer complètement le radical d'un idéal $\mathcal{J} = \sqrt{m}$ de $\mathbb{Z}$ où $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$
6. Déterminer $I + J$, $I \cap J$, $\sqrt{I + J}$ pour :
 - (a) $I = 8\mathbb{Z}$, $J = 12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$
 - (b) $I = (X - 1)$, $J = (X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 3 (4 points)

Soit (f_n) une suite de fonctions définie par

1. Etudier la convergence simple de cette suite sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$
3. la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$

Exercice 4 (4 points)

Etudier la série de terme général u_n lorsque :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

EAMAC – 2014 - SUJET P-I-8

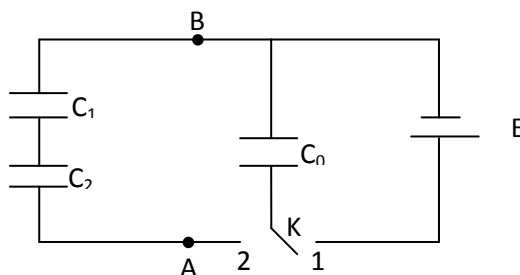
EXERCICE I (5points)

Un point se déplace sur une hélice circulaire représenté paramétriquement dans le repère orthonormé direct $Oxyz$ par les relations suivantes :

- 1) Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'axe Oz .
- 2) Déterminer les composantes du vecteur accélération et en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

EXERCICE II (5points)

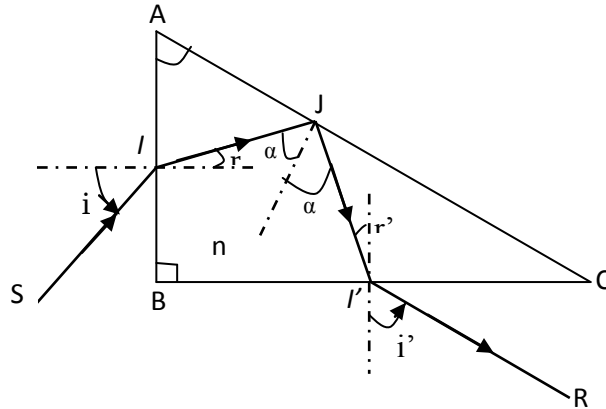
Soit le montage du schéma ci-dessous



- 1) On place l'interrupteur en position 1. Quelle est la charge Q_0 de C_0 ?
- 2) On place l'interrupteur dans la position 2. Calculer $V_A - V_B$ à l'équilibre et les charges Q_0' ; Q_1 et Q_2 des condensateurs C_0 , C_1 , C_2 .
- 3) Montrer la répartition des charges sur chaque condensateur et vérifier si le principe de conservation de la charge est respecté.

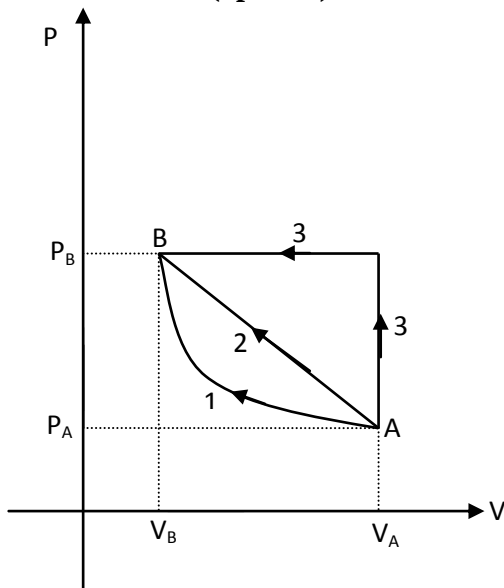
EXERCICE III (5points)

Un prisme de verre, d'indice $n = 1,60$ pour la radiation jaune utilisée, a pour section droite un triangle rectangle ABC . Un rayon lumineux SI , situé dans le plan de section droite, pénètre par la face AB sous l'angle d'incidence i , se réfléchit totalement sur l'hypoténuse AC et émerge à travers BC ; on notera i' l'angle d'émergence.



- 1) Calculer la déviation totale du rayon lumineux SI en fonction de i et i' .
- 2) On donne $A = 60^\circ$. Pour quelle valeur de l'angle d'incidence i le rayon émergent l'R est-il perpendiculaire au rayon incident SI ? En déduire les valeurs des angles de réfraction et de réflexion.
- 3) Le prisme et le rayon incident demeurent fixes ; on utilise une lumière bleue pour laquelle l'indice du prisme devient $n + dn$. Exprimer en fonction de l'angle A le pouvoir dispersif — .

EXERCICE IV(5points)



On considère deux moles d'oxygène supposé gaz parfait que l'on fait passer de l'état initial A (P_A, V_A, T_A) à l'état final B ($P_B = 3P_A, V_B, T$) par trois chemins distincts :

A1B (Transformation isotherme)

A2B (représenté par une droite)

A2B (voir figure)

Calculer les travaux et quantités de chaleur mises en jeu durant ces trois transformations en fonction de R et T .

Application numérique :

$T = 300K$; — — .

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE
AFRICAIN DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
SESSION 2013
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 HEURES**

Exercice 1 (5pts)

1. Montrer que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $\exists \theta \in]a, b[$ tel que: $\int_a^\theta f(t)dt = \int_\theta^b f(t)dt$.

2. Soit $f \in C[a, b]$, $a > 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que:

$$\int_a^\theta f(x)dx = \theta f(\theta).$$

Exercice 2 (4pts)

Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} x^{n+1}$.

Exercice 3 (5pts)

Déterminer l'extremum de la fonction f définie par: $f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$

Exercice 4 (6pts)

1) Exprimer $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ et $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$ en fonction de $\cos \alpha$.

2) Dans $M_n(\mathbb{R})$, on considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b & a & b \\ & & & b & a \end{pmatrix}$$

4) et on désigne par $P_n(\lambda)$ son polynôme caractéristique. Déterminer une relation de récurrence liant P_n, P_{n-1}, P_{n-2} (pour $n \geq 4$)

2/ 5) On pose $\lambda = a + 2b \cos \alpha$. Calculer directement $P_2(\lambda)$ et $P_3(\lambda)$ en fonction de α . En déduire $P_n(\lambda)$ en fonction de α .

4 6) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A .
Montrer que le vecteur propre V_k associé à λ_k a pour composantes $(\sin \omega, \sin 2\omega, \dots, \sin n\omega)$ en précisant la valeur de ω .

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC NIVEAU : INGENIEUR SESSION 2013	PROPOSITION PHYSIQUE 2 DUREE : 3 HEURES
--	--

EXERCICE N°1 : 1

- 1°) On considère un conducteur filiforme, de longueur $2L$, chargé uniformément avec la densité linéique de charge λ . On considère le point M de la médiatrice, situé à la distance d du centre O du segment.
- a°) Déterminer le champ électrostatique créé en M par la tige conductrice.
- b°) En déduire, en ce point M , le champ créé par le fil supposé infini.
- 2°) Le fil est disposé de manière à former une spire carrée de côté $2a$. On désigne par O' le point de concours des diagonales du carré et par $\overrightarrow{O'z}$, l'axe orthogonal au plan du carré. Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point P situé sur l'axe $\overrightarrow{O'z}$, à la distance z de O' .

EXERCICE N°2 :

Un point mobile M se déplace, relativement à un référentiel $R(Oxyz)$, le long d'une courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = a \sin \omega t \\ z(t) = bt \end{cases} \quad \text{où } \omega, a \text{ et } b \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1°) Quelle est la nature du mouvement du point mobile M ?
- 2°) Exprimer, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ se rapportant à R , les composantes de sa vitesse et de son accélération. Calculer leurs normes dans le cas où $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$; $a = 0,3 \text{ cm}$ et $b = \frac{\pi}{5} \text{ cm/s}$
- 3°) Trouver la vitesse et l'accélération en coordonnées intrinsèques. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire

EXERCICE N°3

Un méson π ayant une masse au repos m_π se désintègre pour donner un méson μ (de masse m_μ au repos) et un neutrino ν de masse au repos m_ν .

- 1°) Calculer les énergies cinétiques T_μ et T_ν du méson μ et du neutrino. Le neutrino ayant une

masse nulle montrer que :
$$T_\mu = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}$$

- 2°) On donne $m_\pi = 273m_e$, $m_\mu = 207m_e$ où m_e est la masse de l'électron. Calculer T_μ et T_ν en MeV sachant que l'énergie au repos d'un électron est égale à 0.511 MeV .
- 3°) Calculer en MeV/c les quantités de mouvement P_μ et P_ν des deux particules.

EXERCICE N°4 :

- 1°) On comprime de façon isotherme, un gaz parfait ($\gamma = 1,4$), de la pression $P_0 = 1\text{atm}$ à la pression $P_1 = 20\text{atm}$ à la température $T_0 = 273\text{K}$. Le gaz est ensuite détendu adiabatiquement de façon réversible jusqu'à la pression $P_0 = 1\text{atm}$. Calculer la température finale T_1 après cette double opération.
- 2°) a) On recommence les deux opérations précédentes à la température constante T_1 . Calculer la nouvelle température finale T_2 du gaz.
- b) Trouver la formule générale de la température T_n du gaz, atteinte à la fin de n doubles opérations successives décrites précédemment.
- Application numérique : $n = 4$ et $n = 5$. Quel est l'intérêt de ce procédé ?

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE
AFRICAIN DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE
(EAMAC)**

SESSION 2012

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Exercice 1 (4pts)

1. Déterminer le développement en série de Fourier des fonctions $\cos^3 x$ et $\cos^4 x$ sur $[-\pi, \pi]$.
2. En déduire les valeurs des intégrales suivantes: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 x dx$.

Exercice 2 (6pts)

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante: Soit f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors $\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$.
2. On pose $\mathcal{A} = \{f \in C^2[0, 1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$.
 - a) Déterminer

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

- b) Déterminer la fonction f pour la quelle ce minimum est atteint.

Exercice 3 (5pts)

On considère la matrice: $A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Calculer les nombres u_n, v_n, w_n définis pour $n \geq 1$ par: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$
avec u_0, v_0, w_0 donnés.

Exercice 4 (5pts)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction densité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, & \text{si } x \in]-a, a[, \quad a > 0 \\ 0, & \text{si } x \notin]-a, a[. \end{cases}$$

1. Déterminer l'espérance mathématique et la dispersion de la v.a. X
2. Déterminer la fonction de répartition de X .

Exercice 1

On considère un gaz parfait enfermé dans une enceinte diatherme ayant la forme d'un cylindre dont l'une des bases est un piston mobile. Le milieu extérieur est à la température constante T_0 et à la pression constante P_0 .

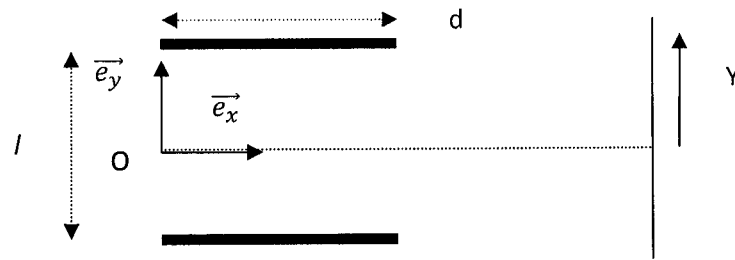
- 1) Déterminer l'expression du volume V_0 occupé par le gaz lorsqu'il est en équilibre avec le milieu extérieur.
- 2) On prépare le système de manière que son volume soit égale $\frac{V_0}{4}$ et on bloque le piston. Quel est le nouvel état d'équilibre du système ?
- 3) A partir cet état imposé au système, on débloquent le piston ; décrire l'évolution de l'état du gaz.

Exercice 2

Un canon à électrons est formé par deux plans métalliques parallèles ; le premier plan, appelé cathode C comporte un filament chauffé qui émet des électrons. L'autre plan appelé anode A est percé d'un trou qui laisse passer les électrons accélérés. Le canon à électrons permet donc d'obtenir un faisceau rectiligne d'électrons. Ce faisceau peut être dévié à travers les plaques d'un condensateur plan ; c'est le principe de fonctionnement d'un oscilloscope cathodique.

- 1) En supposant que la différence de potentiel électrique $U = V_A - V_C$ entre l'anode et la cathode est positive, déterminer l'expression de la vitesse v des électrons à la sortie de l'anode ; on admet que les électrons sont émis sans vitesse initiale.
- 2) On considère un condensateur plan à plaques horizontales et on définit un repère cartésien d'étude $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que les plaques soient parallèles au plan $(O, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$ et l'épaisseur du condensateur est parallèle à l'axe $(O, \vec{e}_y)$. On suppose que l'axe $(O, \vec{e}_x)$ passe par le milieu des plaques avec le point O situé juste à l'entrée du champ électrique uniforme $\vec{E} = -E\vec{e}_y$ entre les plaques. A partir du point O , avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, un électron issu d'un canon à électrons, traverse le champ avant d'en sortir. La distance horizontale des plaques suivant l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est d ; voir le schéma de la figure 1 ci-dessous.
 - a) Montrer que la trajectoire de l'électron est parabolique à l'intérieur des plaques
 - b) On s'intéresse au point d'impact de l'électron, sur un écran perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{e}_x)$. Si Y est la distance de ce point par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$, montrer que Y est proportionnel à la tension U appliquée entre les plaques du condensateur.

Figure 1 :



Exercice 3

On considère une sphère, de centre O et de rayon R , dont la charge électrique totale Q est uniformément répartie dans le volume de la sphère.

- 1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ créé par cette sphère en tout M de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
- 2) Dédire du calcul précédent le potentiel électrique V créé par la sphère en tout point M de l'espace.

Exercice 4

Les niveaux d'énergie E_n de l'atome d'hydrogène ont des valeurs discrètes données par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Dans cette expression, n est un entier tel que $n \geq 1$ et $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

- 1) Déterminer le niveau fondamental de l'atome
- 2) Déterminer l'expression de l'énergie d'un niveau excité
- 3) Quel est le niveau d'énergie de l'atome ionisé ?
- 4) Quelle énergie faut-il fournir à l'atome pour l'ioniser depuis son niveau fondamental ?
- 5) L'atome étant au niveau fondamental, il absorbe un photon pour passer à un niveau excité ; déterminer l'expression de la fréquence du photon absorbé.

&&&&

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES D'INGENIEUR ET DE
CONTROLEUR DE LA CIRCULATION AERIENNE DE L'ECOLE
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET
DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
SESSION 2011**

**EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 HEURES**

*⇒ Ingénieur
Contrôleur*

Exercice 1

Calculer la valeur moyenne de la fonction:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Etudier la convergence de l'intégrale suivante; et lorsqu'elle converge, calculer sa valeur:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx, \quad \beta \geq 0.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x, \text{ avec } \int_1^2 (x - y)^2 dx = 1.$$

Exercice 4

On considère la série entière:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients constants.

2. Résoudre l'équation différentielle obtenue.

3. En déduire la somme S de la série: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}.$

EXERCICE N°1

On considère l'unité de masse de gaz parfait. On rappelle que dans une transformation réversible d'un fluide, la quantité de chaleur mise en jeu dQ (c'est-à-dire échangée avec le milieu extérieur) s'écrit sous les formes :

$$dQ = C_v dT + \ell dV \quad \text{lorsque la température varie de } dT \text{ et le volume de } dV.$$

$$dQ = C_p dT + h dP \quad \text{lorsque la température varie de } dT \text{ et la pression de } dP.$$

- 1) Ecrire les expressions des différentielles de l'énergie interne dU , de l'enthalpie dH et de l'entropie dS . En déduire les relations:

$$\ell = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad h = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad C_p - C_v = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

- 2°) On considère l'unité de masse de gaz réel qui obéit à l'équation de Van der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = rT$$

- a) Etablir les expressions des coefficients ℓ et h .
- b) Etablir l'expression du travail reçu par le gaz, au cours d'une compression isotherme réversible s'effectuant entre les volumes V_1 et V_2 , à la température T .

- 3°) Que devient l'expression de ce travail, aux basses pressions ($b \ll V$) ?

- 4°) a) Déterminer la différence des chaleurs spécifiques $C_p - C_v$ du gaz, en fonction des variables indépendantes P , V et des constantes a , b et r .

- b) En tenant compte du fait que $\frac{a}{V^2} \ll P$ et $b \ll V$, trouver une formule approchée de $C_p - C_v$ en fonction des variables P et T .

EXERCICE N°2

Un point matériel M, de masse m, repéré par ses coordonnées polaires (r, θ), est soumis à la force Newtonienne : $\vec{F} = \frac{-k}{r^2} \vec{e}_r$ (avec $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$), de la part d'un point O. k est une constante positive.

1°) Montrer que l'équation de la trajectoire de M peut être mise sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi_0)},$$

où φ_0 est l'axe focal à l'origine, p le paramètre de la conique et e son excentricité. Donner les expressions de p et e.

2°) On choisira la solution correspondant à $\varphi_0 = 0$. Calculer l'énergie potentielle E_p de M en fonction de k, p, θ et e. (On prendra l'origine des potentiels à l'infini).

3°) Calculer l'énergie cinétique E_c de M en fonction de k, p θ et e.

4°) Calculer l'énergie mécanique E de M. Montrer que E est constante.

On rappelle les formules de BINET :

$$\rho = \frac{1}{r} ; \quad V^2 = C^2 \left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} = -C^2 \rho^2 \left(\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \rho \right) \vec{e}_r$$