

Concours EAMAC 2016	Cycles TECHNICIEN SUPERIEUR et TECHNICIEN	Epreuve de MATHÉMATIQUES
---------------------	--	--------------------------

Exercice MT1-1 : (3 points)

1. Vérifier que pour tout réel x , on a : $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

2. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$.

3. a. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$.

b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$.

Exercice MT5- 2 (5 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.

1°) On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2°)

a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

b) On désigne par A l'événement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'événement : « au moins un animal est malade parmi les 10. ». Calculer les probabilités de A et de B .

3°) On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement : « être atteint de cette maladie ».

a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'événement T .

c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice MT1-4 : (7 points)

I. Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (1point)
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,78 \leq \alpha \leq 0,79$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de cet

ensemble (1,5 point)

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$.

b. Etudier les branches infinies de (C).

4. Construire (C) (On prendra $\alpha = 0,785$).

EXERCICE MT4-3 (5pts)

1°) Donner sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) :

$$z \in \mathbb{C}, z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i).$$

2°) Calculer $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$; en déduire que l'équation précédente est équivalente à

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \right)^3 = 1.$$

3°) En utilisant les racines cubiques de l'unité, donner sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).

4°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.