Corrigé du

CONCOURS EAMAC 2024

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

GROUPE WHATSAPP LMD

Exercice 1 : intégrale impropre - Série de fonctions

a) Montrons d'abord l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}dt$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t}$ est continue et positive sur $]0;1]$ de plus, $\dfrac{\arctan t}{t} \underset{0}{\backsim} 1$ et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ par suite $t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t}$ intégrable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ d'où l'existence démontré.
Soient $a, b \in [0;1]$ tels que $a < b$ et posons $t \mapsto \arctan t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[a;b]$. En posant $u \mapsto \arctan t$ et $v' \mapsto \frac{1}{t}$ on a

$$\int_a^b \frac{\arctan t}{t}dt = [\arctan t \ln t] - \int_a^b \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

par passage à la limite quand $a \to 0,\; b \to 1$ on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

b) Pour tout $0 < t < 1$,

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$$

De plus, l'intégrable $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\ln t\right)dt$.
Soit $(f_n)_n$ la série de fonction définie par $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}\ln t$ si $0 < t < 1$ et $f_n(t) = 0$ si $t = 0$ ou $t = 1$. Alors pour $0 < t < 1$, $f_n'(t) = (-1)^n(2n\ln t + 1)t^{2n-1}$ par suite $\|f_n\|_{\infty,[0;1]} = \dfrac{1}{2ne}$
Notons $R_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k t^{2k}\ln t$. On a : pour $0 < t < 1$

$$|R_n(t)| = \left|\frac{\ln t}{1+t^2}\times(-1)^{n+1}t^{2(n+1)}\right| = \frac{t^2}{1+t^2}|f_n(t)| \leq \frac{1}{2ne}$$

donc la série de fonction $\sum(-1)^n t^{2n}\ln t$ converge uniformement sur $[0;1]$ par suite on peut intervertir somme et intégrale d'où

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\ln t\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n t^{2n}\ln t\,dt$$

à l'aide de deux intégrations par parties, on en déduit $\int_0^1 (-1)^n t^{2n} \ln t dt = -\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ d'où finalement

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 2 : Sous-espace stable

a) Supposons par l'absurde qu'il existe un λ réel non tel que $y = \lambda x$ dans ce cas, on a

$$f(z) = (1+\lambda i) f(x) = az = a(1+\lambda i)x$$

d'où on obtient $f(x) = ax$ par suite $\overline{f(x)} = ax = f(x) = \bar{a}x$ donc $a = \bar{a}$ absurde. On obtient la même conclusion si on avait supposé $x = \lambda y$. Ainsi, X et Y ne sont pas colinéaires.

b) Les composantes x et y vérifient les relations $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ par suite pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\lambda x + \mu y) = \frac{\lambda}{2}(az + a\bar{z}) + \frac{\mu}{2i}(az + a\bar{z}) = \mathrm{D}x + Cy$$

où $D = \lambda \mathrm{re}(a) + \mu \mathrm{Im}(a)$ et $C = \mu \mathrm{re}(a) - \lambda \mathrm{Im}(a)$. Ainsi, on a $f(\mathrm{vect}\{x, y\}) \subseteq \mathrm{vect}\{x, y\}$i,e $\mathrm{vect}\{x, y\}$ est stable par f.

c) On suppose que la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)(x^2-2x+2)$$

le trinôme $x^2 - 2x + 2$ a pour racince $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i = \bar{z}_1$.

$$A - (1+i)I_4 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2-i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé a la valeur propre $1+i$. On a

$$\mathrm{A}z = (1+i)z \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x + (1-i)y + t = 0 \\ -(2+i)z = 0 \\ x - it = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ix \\ z = 0 \\ t = -ix \end{cases}$$

En utilisant les notations des questions précédente $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont les composantes réelles et imaginaires des composantes du vecteur propre z associé avec la valeurs propres $a = 1 + i$. Ainsi, le plan $\mathrm{vect}\{X, Y\}$ est stable par f.

De plus, $\mathrm{A}z = (1+i)z \Rightarrow A\bar{z} = (1-i)\bar{z}$ donc $\bar{z}$ est vecteur propre assocée à la valeur propre $\bar{a} = 1 - i$ donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les composantes réelles et imaginaires des composantes du vecteur propre $\bar{z}$ associé avec la valeurs propres $a' = 1 - i$ qui engrendre également le plan $\mathrm{vect}\{X, Y\}$.

De plus, $u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres 2 et -1. De plus, ces deux vecteurs engrendrent un plan stable par f. En effet, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)=2\lambda u+\mu v$$

Ainsi, on a $f(\text{vect}\{u,v\})\subseteq\text{vect}\{u,v\}$ i,e $\text{vect}\{u,v\}$ est stable par f.
Bilan : les plans stables par f sont les plans :

$$p_1=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\ p_2=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\ p_3=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$p_3=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}i\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ p_4=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}-i\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ p_4=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix}i\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Exercice 3 : séries numériques

1. Nature des séries et calculs de somme.
   - Nature de la série de terme général $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de sa somme.
     Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\neq0$, $u_n\geq0$ et $u_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$. La série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha=2>1$ donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge. De plus,
     $$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$
     donc $S=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=1$.
   - Nature de la série de terme général $u_n=\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$ et calcul de sa somme.
     Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\neq0$, $a_n=\frac{2n+1}{n(n+1)}$. La suite de terme général a_n est positive, décroissante $\left(a_{n+1}-a_n=-\frac{2n+1}{n(n+1)}<0\right)$ et converge vers 0 donc la série alternée $\sum v_n$ vérifie le critère spécial par conséquent elle converge. De plus,
     $$\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{k}-\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k}=-1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$
     donc $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=-1$.
2. En effectuant un DL, on obtient :
   $$u_n\underset{n\infty}{=}(a+b+1)\ln(n)+\frac{a+2b}{n}-\frac{a+4b}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   par suite :
   - si $a+b+1\neq0$ alors $u_n\nrightarrow0$ donc $\sum u_n$ diverge.

- si $a+b+1=0$ et $a+2b\neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge.
- si $a+b+1=0$ et $a+2b=0$ i,e si $a=-2$ et $b=1$ alors $u_n \underset{n\infty}{=} -\frac{1}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

Bilan : $\sum u_n$ converge si et seulement $a=-2$ et $b=1$.

Exercice 4 : Endomorphisme

a) Soit y dans $\mathrm{Im}(f)$. Alors il existe x dans E tel que $y=f(x)$ donc $f(y)=f(z)$ avec $z=-f^2(z)$ par suite $f(y)$ est dans $\mathrm{Im}(f)$ i,e $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.

b) Soit x dans $\mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe y dans E tel que $x=f(y)$ donc $f^2(x)=f^3(y)=-f(y)=-x$. Ainsi, on a montré que pout tout x dans $\mathrm{Im}(f)$, $f^2(x)=-x$.

c) Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.

- D'une part, g est bien définie car $f(\mathrm{Im}(f))\subset \mathrm{Im}(f)$,
- d'autre part, $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$ mais x est dans $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$ implique $f^2(x)=-x=0$ donc $x=0$ par suite $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=0=\mathrm{Ker}(g)$ donc g est bijective.

d) **Première méthode** :
Soit $(e_1,..,e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ que l'on complète en une base $B=(e_1,..,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. La matrice de f^2 relativement à la base B est donnée par :

$$M=\mathrm{Mat}_{(B)}(f^2)=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & (**) & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ & & & -1 & 0 & \dots \\ & (*) & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \vdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit déduit que $\mathrm{rg}(f^2)=\mathrm{rg}(f)$.
Soit A la matrice de $f^2_{|\mathrm{Im} f}$ restreint à $\mathrm{Im}(f)$. On a $\det(A)=(-1)^{\mathrm{rg}(f^2)}$ or $\det(A)>0$ car A est coefficients réels et représente la matrice de f^2 par suite $(-1)^{\mathrm{rg}(f^2)}=1$ d'où $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(f^2)$ est un entier pair.
Deuxième méthode :
Le polynôme $X^3+X=X(X^2+1)$ est un polynôme scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ qui annule f donc f est $\mathbb{C}-$ diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)\subset\{0;-i;i\}$.

- si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)=\{0\}$ alors f est l'endomorphisme nul sur E donc $\mathrm{rg}(f)=0$ donc pair.
- sinon $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)=\{0;-i;i\}$. En notons p et q les multilplicité de $-i$ et i dans le polynôme caractéristique de f alors $\mathrm{tr}(f)=-pi+qi$. Puisque la matrice de f est à coefficients réels on en déduit que $-pi+qi$ doit-être un nombre réel donc on a nécéssairement $p=q$ par suite $\mathrm{rg}(f)=2p$. Ce qui achève la preuve.