

	<p align="center">Concours EAMAC 2024</p>	<p align="center">Cycle : INGENIEUR</p>
---	--	--

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

EXERCICE 1

a) Établir $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

b) En déduire que $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE 2

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n et A sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

On suppose que a est une valeur propre non réelle de A et Z un vecteur propre associé appartenant à \mathbb{C}^n .

On note X et Y les vecteurs de \mathbb{R}^n dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de Z .

- a) Montrer que X et Y sont non colinéaires.
- b) Montrer que le sous-espace engendré par X et Y est stable par f .
- c) On suppose que la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer tous les plans stables par f .

EXERCICE 3

1. Donner la nature et la somme des séries de terme général

$$u_n = 1/n(n+1) ; v_n = (-1)^{n+1}(2n+1)/n(n+1)$$

2. Soit la série de terme général

$$U_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) \quad (n \geq 1)$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série de terme général U_n converge et dans ce cas calculer sa somme.

EXERCICE 4

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^3 + f = 0.$$

- a) Montrer que l'espace $\text{Im}(f)$ est stable par f .
- b) Pour x appartenant à $\text{Im}(f)$, calculer $f^2(x)$.
- c) Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}(f)$. Montrer que g est un isomorphisme.
- d) En déduire que le rang de l'endomorphisme f est un entier pair.