CLUB UNESCO-ENI-ABT

CONCOURS D'EXCELLENCE INTER-LYCEES 2026

Série : TSEXP **Epreuve : de Mathématiques** **Durée : 03 h**

Exercice 1 : (6 points)

Soit le polynôme P de variable complexe z définie par :

$P(z) = z^3 - (x+6i)z^2 + (-x+19i)z + 18 - 6i$.

1) a) Détermine x pour que $2i$ soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Déduis-en la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points $A, B\ et\ C$ d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 3 + 3i$.

a) Place les points $A, B\ et\ C$ dans le plan complexe.

b) Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes : z_B et z_C.

c) Calcule AB, AC et BC. Déduis-en la nature du triangle ABC.

d) On pose $z' = \frac{z - z_B}{z - z_C}$. Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z'| = 1$.

3) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et laisse invariant le point C.

a) Détermine l'expression complexe de S.

b) Déduis-en ses éléments caractéristiques.

4) Détermine et construis l'ensemble (Γ)des points M dont d'affixe z tels que : $|(1+i)z - 6i| = 2\sqrt{2}$

5) Soit T la transformation du plan définie par son expression complexe : $z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\bar{z} - 2 - 2i\sqrt{3}$

a) Quelle est la nature de T ?

b) Détermine les éléments caractéristiques de T.

Exercice 2 : (4 points)

Dans le cadre du programme jeunesse d'un gouvernement une enquête a été menée en 2020 sur l'ensemble des élèves issus d'un centre de formation professionnelle.

Cette enquête a révélé que 30% de ces élèves sont des bacheliers. Parmi ces bacheliers, 80% ont obtenu un emploi et parmi les non bacheliers, 40% n'ont pas obtenu un emploi.

On choisit au hasard un élève de ce centre. On désigne par :

B l'évènement $\ll$ ***l'élève choisi est un bachelier*** $\gg$ **;**

E l'évènement $\ll$ ***l'élève choisi a obtenu un emploi*** $\gg$ **;**

1) a) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.

b) Calcule La probabilité que cet élève est un bachelier et ait obtenu un emploi.

c) Démontre que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est égale à 0,66.

d) L'élève choisi a obtenu un emploi. Quelle est la probabilité qu'il soit bachelier ?

2) On admet que le centre a formé suffisamment d'élèves. On choisit au hasard 5 élèves du centre et on désigne par X la variable aléatoire égale nombre d'élèves ayant obtenu un emploi.

a) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ de X et interprète le résultat.

b) Calcule la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi.

<u>Problème :</u> (10 points) (Les parties A) et B) sont indépendantes)

A) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} -x + 6 - 4e^{\frac{x}{2}} & si\ x \leq 0 \\ x + 2 - x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) a) Montre que f est continue en 0.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-e^{\frac{x}{2}}}{x}$. Déduis-en $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Calcule $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

d) Que peut-on conclure pour f et pour (C_f) ?

2) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3) Montre l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique$\alpha \in]4{,}3\,; 4{,}4[$.

4) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse e.

b) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 6$ est asymptote à (C_f).

c) Etudie la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.

d) Trace (C_f), (T) et (D) dans un même repère en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse 0.

5) Calcule, en fonction de α et cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$. Déduis-en l'expression de $\mathcal{A}$ sans $\ln\alpha$.

6) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_n = \int_{-\frac{n+1}{2}}^{-\frac{n}{2}} [f(x) - (6 - x)]dx$ où $f(x) = -x + 6 - 4e^{\frac{x}{2}}$.

a) Exprime U_n en fonction de n.

b) Montre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Etudie la convergence de la suite (U_n).

B) Le but de cet exercice est l'étude de la vitesse de rotation angulaire lors du freinage d'un disque dans un disque liquide. Cette vitesse $N(t)$ représente le nombre de tours par minutes à l'instant t exprimé en minutes. La fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -(\ln 200)y$

1) Détermine la fonction N sachant que $N(0) = 2500$

2) Calcule la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$

3) Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera t- elle d'un tour par minute ?

4) Calcule la valeur moyenne de N entre les instants $t = 0$ et $t = 1$.