Fomesoutra.com
ça soutra !

SUJET CAP-CEG

SUJET 01 : CAP-CEG 2021

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES (20 points)

Exercice 1

Considérons la suite numérique donnée par $u_n = \ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1. Donner une condition nécessaire de convergence d'une série numérique $\sum u_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (1 pt)
2. Prouver une convergence de la série $\sum u_n$. (1,5 pts)
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. (1,5 pts)

Exercice 2

1. Soient $c, d \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\{0\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} c\ exp\left(-\frac{1}{x}\right)\ si\ x > 0 \\ d \exp\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x < 0 \end{cases}$$

   a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $c\ et\ d$ pour que f soit prolongeable par continue en 0. (1 pt)

   b) Démontrer que si cette condition est remplie, noté g est dérivable en 0 et que sa fonction dérivée g' est continue en 0. (3pts)

2. On considère l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$.
   Résoudre cette équation. (2pts)

Exercice 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Donner le rang de A. (1pt)
2. Donner une base de $Ker\ (f)$. (2 pt)
3. Donner une base de $Im\ ((f)$. (2 pts)
4. Déterminer le polynôme caractéristique et les vecteurs propres associés à A
5. La matrice A est-elle diagonalisable ? proposez une réduction de f. (2 pt)

SUJET 02 : CAP-CEG 2020

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 (6 pts)

On donne les applications

f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $f(x\,;y\,;z) = (2x\,;x-y\,;x+y+z)$

et g de $\mathbb{R}^2$ $vers$ $\mathbb{R}^2$ telle que $g(x;y) = (x+y;2x+2y)$.

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Déterminer le noyau de f et celui de g
3. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 2 (8 pts)

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3
2. Trouver les réels a, b et c tels que $A^3+aA^2+bA^2+cI_3 = 0$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
3. a) Montrer que la matrice A est inversible.

   b) Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

   c) Déduire A^{-1}

Exercice 3 (6 pts)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{,n\geq o}$ par $\begin{cases} u_0 > 0, \text{une donnée réelle} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \end{cases}$

On se propose de montrer que $(u_n)_{,n\geq o}$ converge vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$
2. a) Montrer que $(u_n)_{,n\geq o}$ est minorée par $\sqrt{a}$

   b) Montrer que $(u_n)_{,n\geq o}$ est décroissante.

   c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$

SUJET 03 : CAP-CEG 2019

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 (10 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1 *Calculer le déterminant de* A. *La matrice* A*est-elle inversible ? quel est le rang de l'application linéaire associée de* A *?*

2 *Calculer les valeurs propres de* A. *Indiquer pourquoi la matrice* A*est diagonalisable*

Déterminer, une matrice de passage P *telle que* $D = P^{-1}AP$, *où* D *est une matrice diagonale.*

3 *On pose* $B = \frac{1}{4}A$. *Déduire des résultats précédents la matrice* B^n.

4 *On considère les suites récurrentes* $(U_{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *définies comme suit*

$$\begin{cases} U_n = \frac{3}{4}U_{n-1} + \frac{1}{4}V_{n-1}, & U_0 = 2 \\ V_n = \frac{1}{4}U_{n-1} + \frac{3}{4}V_{n-1}, & V_0 = 1 \end{cases}$$

a) Déterminer l'expression explicite des deux suites réelles $(U_{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_{n})_{n\in\mathbb{N}}$

b) Ces suites admettent-elles une limite quand n *tend vers* $+\infty$

Exercice 2 (10 pts)

On souhaite calculer

$$I = \int_0^n \frac{x}{1+\sin x}dx$$

1) Exprimer $\frac{2\tan(\frac{\pi}{2})}{1+\tan(\frac{\pi}{2})}$ en fonction de $\sin x$

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$

3) Montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-x}{1+\sin x}dx$

4) En déduire la valeur de I

SUJET 04 : CAP-CEG 2017

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUE

Exercice 1. (7pts)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

En rappel, une matrice M est dite idempotente si M^2=M.

Montrer que :

a) AB=A

b) BA=B

c) A et B sont idempotentes.

1. Le polynôme $P(X) = x^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X$+1
   a) Vérifier que 1 est une racine double de P.
   b) Donner une factorisation complète de P(X)

c) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x^3+7x^2+5x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}$

Décomposer *f(x)* en éléments simples et déterminer une primitive de *f.*

2. Soit la fonction arctan définie par arctan $x = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$ $pour\ tout\ réel\ x.$

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^2}$

$et\ g(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^3}$

a) A l'aide d'une intégration par partie de $\int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$, trouver une relation lian

f à arctan.

b) En déduire une expression de *f(x).*

c) En procédant de façon similaire, trouver une expression de *g(x).*

SUJET 05 : CAP-CEG 2016

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 (7pts)

On donne l'équation différentielle $(E)\colon y''(t) + y(t) = 3\cos 2t$.

1) Donner la forme générale de la solution sans second membre $(E_1)\colon y''(t) + y(t) = 0$
2) On donne la fonction f définie par $f(t) = 2\sin t - \cos 2t$.
   a. Montrer que f est solution de l'équation (E).
   b. Montrer que f est périodique de période 2π.
   c. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$

Exercice 2 (09 points)

On note $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par : $f(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'$ où P' et P'' désignent respectivement les polynômes dérivés premières et dérivés secondes de P .

1. Montrer que f est endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base conique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Montrer que f est diagonalisable et le diagonaliser.
4. Résoudre $f(P) = P$

Exercice 3 (04pts)

En utilisant la définition de la limite d'une suite, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1$$

SUJET 06 : MESURE NOUVELLE 2016

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 (7pts)

On considère la matrice

$$A\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

b) Pour $n > 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 3X + 2$

c) En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 2 (6pts)

On considère l'équation différentielle : $(E) : ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ $(a, b, c \text{ réels}, a \neq 0)$
Pour $x \in]0; +\infty[$.

1) Soit y une fonction deux fois dérivable sur$]0, +\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constants.
3) Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Exercice 3 (7pts)

On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -ln2$

1) Montrer la convergence des deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci-dessus.
2) Décomposer en élément simplifiées la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$
   a) Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^3-k}$ et calculer sa somme.

DEUXIEME PARTIE : PHYSIOLOGIE VEGETALE

1. Donner les équations des réactions qui résument la photosynthèse ? (4pts)
2. Selon le mécanisme de la photosynthèse, il existe trois catégories de plantes C_3, C_4 et CAM

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES

Exercice 1 (6 pts)

1. Déterminez les réels a et b pour que les fonctions f et g soient continue chacune sur son domaine de définition.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{x+2} & si \quad x \neq -2 \\ a+2 & si \quad x = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{4+2x}{x+2} & si\ x \in [0,1[\\ 2\sin(bx) & si\ x \in [1,2[\\ & avec\ b \in]0,2[\end{cases}$$

2. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} & si\ \ x > 0 \\ 3 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & si\ \ x \neq -1 \\ 3 & si\ \ x = -1 \end{cases}$

Exercice 2 (8 pts)

1 Montrer que pour tout réel x, $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$

2 En déduire que $\cos\left(\frac{2x}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$ sont des racines du polynôme $P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1$

3 Montrer que $P(X) = (X-1)(4X^2+2X-1)^2$ et en déduire que $\cos\left(\frac{2x}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

4 Montrer que le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R a longueur $^{R}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

Exercice 3 (6 pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On note la matrice unité d'ordre 4

1) Montrer que $A^2 + A + I_4 = 0$
2) En déduire que $A^3 = I_4$
3) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

DEUXIEME PARTIE : BIOLOGIE VEGETALE

1 Tissus végétaux : définitions : différences de types, leurs caractéristiques et leurs fonctions (10 pts)

2 Anatomiquement comment différencie-t-on une tige d'un pétiole ? (4 pts)

3 Annotons la figure ci-dessous en utilisant que les lettres. A étant son titre complet (6 pts)

SUJET 08 : CAP-CEG 2014

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUE

Exercice 1 (10pts)

1) Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On déterminera les valeurs propres en ordre croisant et on choisira les colonnes propres avec un premier terme égal à 1.

2) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - 2t - e^t sint \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 2t - e^t sint \end{cases}$

Exercice 2 (10pts)

1. Déterminer les lettres a et b pour que f et g soient continue chacune sur son ensemble de définition.
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} \; si \neq 1 \\ a - 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \frac{1-3x}{x-2} \; si \; x \in [0,1[\\ 2sinbx \;\; si \; x \in [1,2] \\ \quad avec \; b \in]0,2[\end{cases}$
3. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} & si \; x > 0 \\ 3 & si \; x \leq 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & si \; x \neq -1 \\ 3 & si \; x = -1 \end{cases}$
4. Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x+2) = f(x) \quad \forall x \in R$ et $f(x) = x^3 + ax^2 + bx, \forall x \in [0,2[$ a et b sont des réels : trouver sous forme d'une relation entre a et b, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue

AUTRES SUJETS

A- QUELQUES SUJETS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

Sujet 1

Exercice 1 :

1. Donner si elle existe, la borne inférieure et la borne supérieure de $C = \{x \epsilon \mathbb{R};\ x^2 < 5\}$.
2. A partir de la définition, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ar\cos(x) = arc\sin\left(x\sqrt{3}\right)$

Exercice2 :

On considère la suite (u_n) $n\epsilon\mathbb{N}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}} \end{cases}$

1. Monter que $I = \left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[$ $est\ stable\ par\ la\ fonction\ f\ définie\ par$: $f(x) = \sqrt{x - \frac{2}{9}}$
2. Etudier la variation de la suite (u_n).
3. Montrer que (u_n) est convergente.
4. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$

Exercice 3 :

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x+sin^2 x}\, dx$

Indication : On pourra effectuer le changement de variable suivant : $u = \sin x$

Sujet 2

Exercice 1 :

On donne la suite réel (u_n) $n\epsilon\mathbb{N}$ $défini\ par$: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)\ pour\ n\ \epsilon\ \mathbb{N} \end{cases}$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction $f\ définie\ par$: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.
2) Monter que pour tout entier naturel $n, u_n \geq \sqrt{3}$.
3) Quelle est la variation de la suite (u_n) ?
4) Justifier que la suite (u_n) admet une limite.
5) On note $l\ cette\ limite; calculer\ l.$

Exercice 2 :

1) Former le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 6 de $f(x) = ch(\ln(chx))$.
2) En utilisant les développements limités, calculer $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{x\, tan^2(x)}{\cos(x)+1}$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

$(Varable\ x, fonction\ inconnue\ Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

1. $Y' + (\sin x)\, Y - \sin x \cos x = 0.$

2. $Y'' - 4Y = \exp(2x) - x\, exp\,(-x).$

Sujet 3

Exercice 1

A) Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

b) $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

c) $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) = \arcsin(x)$

d) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = \arccos(x)$

B) Calculer:

e) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

EXERCICE 2

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

La suite suivante est-elle convergente ?

EXERCICE 3

A) Calculez les primitives suivantes :

1) $f(x)=\frac{1}{x^2+5}$ 2) $f(x)=\tan^3 x$ 3) $f(x)=\frac{1}{\tan^3 x}$

B) Montrons que chacun des ensembles suivants est borné et calculer sa borne supérieure et sa borne inferieur.

1) $A=\left\{\frac{\frac{n-1}{n+1}}{n} \in IN^*\right\}$; 2) $B=\left\{(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \,/ n \in IN\right\}$

3) $C=\left\{\frac{1}{n} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n} \in IN^*\right\}$

C) Pour chacun des ensembles suivants, donner, si elles existent la borne inférieure et celle supérieure et dire si elles font partie d l'ensemble considéré.

1°) A= $\{x \in Q \,/ x^2 \leq 7\}$

2°) $B = \{x \in Q / x^3 \leq 8\}$

3°) $C = \{x \in IR / x^2 \leq 5\}$

Sujet 4

Exercice 1

a) Enoncer le théorème des accroissements fini

b) Déterminer la dérivée seconde de f (x) = $\frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \arctan(x)$

c) Soit f une fonction numérique continue sur [0,1] telle que $\int_0^1 (t)dt = \frac{2}{3}$

Exercice 2

1. On considère la suite (U_n) $n \in IN$ *définie par* :

$$\begin{cases} U_n = 1 \\ U_{n+1} = \text{Un} + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in IN \end{cases};$$

Montre que (U_{2k}) k≥ 0 *sont des suites adjacentes*

2. Calculer :

$$I = \int_e^3 \frac{dx}{x(\ln x)} \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(2x)\, dx$$

Sujet 5

Exercice 1

1. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires
2. Déterminer la dérivée seconde de f(x)= $\frac{1}{2}x^{2\arctan(x) - \frac{1}{2}}(x - \arctan(x))$
3. Traduire par les qualifications " $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$"

Exercice 2

On considère la suite récurrente définie par : $\begin{cases} U_{0=\frac{1}{2}} \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} - \frac{2}{9} \end{cases}$

1. Montrer que $I = \left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[$ *est stable par f définie par* $U_{n+1} = f(U_n)$
2. Etudier les variations de (U_n)
3. Montrer que (U_n) *est convergente. calculer sa limite*

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

K=$\int_e^3 \frac{1}{x(lnx)^3} dx$ J= $\int_0^1 arctanx\, dx$ I=$\int_0^{\pi} \frac{sinx}{6-5cosx+cos^2x} dx$

SUJET 6

Exercice 1 :

On considère la partie de ℝ suivante : $A = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1} / x \varepsilon \mathbb{R}\right\}$

1. Déterminer les réels a *et* b *tels que* $\frac{x^2+2}{x^2+1} = a + \frac{b}{x^2+1}$.
2. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de A.

Exercice 2 :

On considère la fonction $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{x^3+6x}{3x^2+2} \end{cases}$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Déterminer les points fixes de f.
3. Justifier que $I = \left[-\sqrt{2}\,,0\right]$ *est stable par* f.
4. Montrer que la suite définie par $\mathcal{U}_0\ \varepsilon$ I et $\forall n\ \varepsilon\ \mathbb{N}$, $u_n = \frac{u_n^3+6u_n}{3u_n^2+2}$ est convergente puis donner sa limite.

Exercice 3 :

Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{6-5\cos x+\cos x^2 x} dx.$

ALGEBRE

SUJET 1

EXERCICE 1

1) Montrer que : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$

2) Résoudre : $A \cup X = B$ ou l'inconnue est X

EXERCICE 2

1) Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculer A+ B ; AB ; 2C + 3D ; C-D et donner leur déterminant

2) On donne : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculer A^2 et A^3

b) Montrer par récurrence : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

SUJET 2

EXERCICE

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + \ 2z \ = \ 1 \\ -y + z = \ 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

1) Donner l'écriture matricielle du système sous la forme AX = B. On précisera A, X et B.
2) Calculer $A^3 \ - \ A$
3) A est-il inversible ? si oui donner son inverse A^{-1}
4) En déduire la solution du système

SUJET 3

Exercice 1

1) Soit $f\ (x,\ y)\ =\ x^3\ +\ xy\ +\ y^2$. Déterminer l'ensemble des points critiques de f puis trouver la nature de ses points critiques.

2) Trouver le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{e^x}{1-\ln(1+x)}$

3) calculer à l'aide des développements limités la limite de $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^x}{\ln(1+x)}$

Exercice 2

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \ > \ 0, \frac{1}{1+x} - < \ ln(1 \ + \ x) - \ ln(x) \ < \frac{1}{x}$$

2) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ ln(1\ +\ n)\ <\ 1 + \frac{1}{2}\ + \frac{1}{3}\ +\ \cdots\ + \frac{1}{n}\ <\ 1 + ln(n)$.

3) Soit $(U_n)n \in \mathbb{N}$ la suite définie par :

$\forall n > 1, U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$

Montrer que $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est décroissante et convergente.

SUJET 4

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Soit $x \in \mathrm{IR}$. Déterminer la matrice $A - xI_2$
2) Calculer le déterminant de la matrice $(A - xI_2)$
3) Donner les solutions de l'équation $det(A - xI_2) = 0$.

Exercice 2

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis par récurrence A^n, $n \in IN$.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans IR, telle que $f(x) = x^2$. Décrire les sous-ensembles suivants de IR: $f^{-1}(\{4\})$; $f^{-1}(]-\infty; -1])$; $f([-1; +\infty[)$

SUJET 5

Exercice 1

Soient P, Q, R des propositions. Montrer que :

1) P => (Q => R) équivaut à (P et Q) => R
2) (P ou P) => R équivaut à (P => R) et (Q => R)

Exercice 2

Soit f l'application de IR^2 dans IR^2 définie par $f(x,y) = (X, Y)$ avec:

$$f(X,Y) = \begin{cases} X = x + y \\ Y = 2x + y^3 \end{cases}$$

1) f est-elle surjective ?
2) f est-elle injective ?

Exercice 3

1) Soit $n \in IN^*$. Montrer que 42 divise n^7-1
2) Déterminer le nombre de diviseurs de 10 !
3) Résoudre dans IZ l'équation $x - 1|x + 3$

Exercice 4

Sur l'ensemble IR, des nombres réels, on définit la loi de composition interne. Notée*, en posant, pour tout couple $(a,\ b\ ) \in\ IR \times IR$: $a\ *\ b\ =\ a\ +\ b\ -\ ab$

1) Cette loi est-elle commutative ? associative ? possède-t-elle un élément neutre ?
2) IR, muni de cette loi * est-il un groupe ?
3) soit $n \in IN^*$. Donner la valeur de $x^{*n}\ = a * a * \ ...\ * \ a\,(n\ \ fois)$

SUJET 6

Exercice 1

On considère le système (S) suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + \ y\ -\ 2z\ =\ 8 \\ -x + y + z = -4 \end{cases}$$

1) Ecrire (S) sous forme matricielle $AX =\ B$. Vous préciserez A ; X et B
2) Montrez que$A^3\ -\ 3A^2\ +\ 7A -\ 4I\ =\ 0$
3) Déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1}
4) En déduire la solution du système (S)

5) Résoudre le système (S) par la méthode de Cramer.

Exercice 2

Soit f une application définie par : $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - y + 3z \\ 5x + 2z \\ -2x + 2y - 6z \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrice A telle que $f\ (x,\ y,\ z)\ =\ AX$; on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2) On déduit $Ker(f) = \ \{(x, y, z)/f(x, y, z)\ =\ 0_{\mathbb{R}^3}\}$

3) Montrer que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

4) Déterminez-en une base puis donner sa dimension

5) Résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -4x + 6y - 8z = 0 \\ -6x - 8y + 10z = 0 \end{cases}$

SUJET 7

Exercice1

1) On définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *la loi* $*$ *par* : $(x; y) * (a; b) = (xb + ay; by)$
$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ Est-il un groupe abélien ? Justifier.

2) Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ on définit une seconde loi $\perp$ par : $(x; y) \perp (a; b) = (xa; yb)$
Peut-on dire que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *, \perp)$ est un anneau ?

Exercice 2

1) Déterminer lequel des ensemble E, F, G et H sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Pour ceux qui le sont, précisé la dimension

$E = \ \{(x, y, z, t)\ \epsilon \mathbb{R}^4/ - x\ + 2y - 3z + 4t = 0\}$
$F = \{(x, y, z, t)\ \epsilon \mathbb{R}^4/\ x = -t\}$
$G = \{(x, y, z, t)\ \epsilon \mathbb{R}^4/x^2 + y^2 = 0\}$

$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x^2 - y^2 = 0\}$

2) On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculer : A^2 et A^3.

b) Monter par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Exercice 3

1) Résoudre si possible par la méthode de CRAMER :

$$\begin{cases} 3x - 7y + 2z = 38 \\ 2x + 3y + 5z = 39 \\ 4x - 3y + 2z = 58 \end{cases}$$

2) Résoudre par la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} x - y + 3z + 2t = 1 \\ -4x + 6y - 8z + 13t = 0 \\ 6x - 8y + 10z - 19t = 0 \\ -8x + 10y - 12z + 25t = -4 \end{cases}$$

SUJET 8

Exercice 1

Soit f une fonction définie par :

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - y + 3z \\ 5x + 2z \\ -2x + 2y - 6z \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrice A telle que $f(x, y, z) = AX$ où on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2) On définit $Ker\,(f) = \{(x, y, z) / f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

3) Montrer que $Ker\,(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) Déterminez-en une base puis donner sa dimension.

Exercice 2

On donne : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1) Ecrire A sous la forme A = D + C.
2) Calculer D^3 et C^3.
3) Calculer D^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

A) Dire si le système suivant est de Cramer. Si oui, le résoudre par la méthode.

B) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + 3z + 2t = 1 \\ -4x + 6y - 8z + 13t = 0 \\ -6x - 8y + 10z - 19t = 0 \\ -8x + 10y - 12z + 25t = -4 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

1) Donner l'écriture matricielle du système sous la forme AX = B. On précisera A, X et B.
2) Calculer $A^3 - A$.
3) A est-il inversible ? Si oui, donner son inverse A^{-1}. En déduire la solution du système.

SUJET 9

Exercice 1

Sur IR déjà muni de la multiplication et l'addition, on définit la loi* par : a* b = a+ b + ab

1) (a) montrez que * est associative

(b) Montrez que * possède un élément neutre

(c) Quels sont les éléments symétrisables ?

2) (a) La loi* est-elle distributive par rapport à la multiplication ?

(b) Est-elle distributive par rapport à l'addition ?

Exercice 2

Soient les quatre assertions suivantes :

a) $\exists x \in IR \forall y \in IR\ x + y > 0$

c) $\forall x \in IR \forall y \in IR x + y \geq 0$

b) $\forall x \in IR \exists y \in IR x + y > 0$

d) $\exists x \in IR \forall y \in IR\ y^2 > x$

1) Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ? (Justifiez)
2) Donnez-leur négation

Exercice 3

Les questions sont indépendantes

1) Montrer que, pour tout $n \in IN^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17
2) Démontrez que $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$
3) Résoudre dans IZ l'équation $x - 1|x + 3$

SUJET 10

Exercice 1

A) Soit f l'application définie par :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \to (2x - y, x + 3y)$$

f est-elle linéaire ? si oui quel est son noyau ?

B) Soit le système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -2x + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Résoudre (s) de deux manières différentes.

C) Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 ; B^2 ; $AB; BA$ et en déduire $(A+B)^2$.

Exercice 2

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ 2x - y + z - t = 0\}$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
2) Trouver une base puis la dimension de F

Resoudre (s) de deux manières différentes.

C) Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 ; B^2 ; AB; BA et en déduire $(A+B)^2$.

Exercice 2

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + z - t = 0\}$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2) Trouver une base puis la dimension de F.