

CONCOURS DIRECT DE RECRUTEMENT DE MILLE DEUX CENT SOIXANTE QUINZE (1275) ELEVES PROFESSEURS CERTIFIES DES LYCEES ET COLLEGES A FORMER A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE DE KOUDOUGOU (ENS/UK), POUR LE COMPTE DU MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION (MENA), SESSION DE 2017.

 Fomesoutra.com  
ga soutra!

**NIVEAU : LICENCE**

**OPTION : MATHEMATIQUES**

**Date : 18/08/2017**

**Durée : 04 heures**

**Coefficient : 04**

**EPREUVE DE SPECIALITE**

*(L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé)*

**Exercice 1 (6 pts)**

On considère la matrice carrée d'ordre 3 définie par

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $M$  ; ainsi que son spectre.
2. Quelles sont les sous espaces propres associés aux différentes valeurs propres ?
3.  $M$  est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser. On précisera la base  $B$  et les matrices  $D$  et  $P$  dans cette base, où  $D$  désigne la matrice diagonale et  $P$  la matrice de passage.
4. En déduire  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2 (8 pts)**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad 2y'' - y' - y = -7 - 3x + (12x + 5)e^x.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à  $(E)$ . On notera  $y_H$  sa solution.
2. Trouver une solution particulière de l'équation suivante sous la forme  $y_1 = mx + p$  avec  $m, p \in \mathbb{R}$  :

$$(E1) \quad 2y'' - y' - y = -7 - 3x.$$

3. Trouver une solution particulière de l'équation suivante sous la forme  $y_2 = x(ax + b)e^x$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$(E2) \quad 2y'' - y' - y = (12x + 5)e^x.$$

4. En déduire une solution particulière  $y_p$  de l'équation (E).
5. Écrire la solution générale  $y_G$  de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer la solution  $f$  de (E) telle que la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $A(0; 2)$  soit parallèle à la droite (D) d'équation  $y - 9x + 9 = 0$ .

**Exercice 3** (6 pts)

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-1, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+x \cos^2 t} dt.$$

1. Préciser  $f(-1)$  et  $f(0)$ .
2. Etablir pour tout  $x > -1$ , la relation  $f(x) = \sqrt{1+x} f\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ .
3. Démontrer que l'on a pour  $0 \leq x_0 \leq x$ , on a l'encadrement

$$0 \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{x - x_0}{4}.$$

4. Démontrer que l'on a pour  $-1 < x < 0$ , on a l'encadrement

$$0 \leq f(x) - f(-1) \leq \frac{1}{2} \sqrt{1+x}.$$

5. Étudier la continuité de  $f$ .

CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT DE MILLE QUATRE CENT QUATRE VINGT QUINZE (1495) ELEVES PROFESSEURS CERTIFIES DES LYCEES ET COLLEGES A FORMER A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE DE KOUDOUGOU (ENS/UK), POUR LE COMPTE DU MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION (MENA), SESSION DE 2016.

**NIVEAU : LICENCE**

**OPTION : MATHEMATIQUES**

**DATE : 11/08/2016**

**EPREUVE DE SPECIALITE**

*(L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé)*

**Durée : 04 heures**

**Coefficient : 04**

**Exercice 1 : (5 pts)**

On donne la courbe paramétrée suivante :  $(C)$  définie par  $\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ .

1. Montrer que la courbe peut être entièrement obtenue en l'étudiant sur  $[0; \pi]$ .
2. Dresser le tableau commun de variation des fonctions  $x$  et  $y$ .
3. Tracer  $(C)$ .

**Exercice 2 : (4 pts)**

On définit sur  $\mathbb{R}$  la relation  $\nabla$  par  $x \nabla y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ .

1. Montrer que la relation  $\nabla$  est réflexive.
2. Montrer que la relation  $\nabla$  est symétrique.
3. Montrer que si  $x \nabla y$  et  $y \nabla z$  alors  $xye^z = yze^x$ . Dédurre que la relation  $\nabla$  est une relation d'équivalence.

**Exercice 3 : (6 pts)**

1. On donne la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$

- a. Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle inversible.
- b. Déterminer la matrice inverse de  $A$ .

2. On donne la matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a. Déterminer la transposée de la matrice  $B$ .

b. Déterminer le polynôme caractéristique de  $B$ .

c. Démontrer que 2 et 4 sont des valeurs propres de  $B$  et que la matrice  $B$  est diagonalisable.

Donner la matrice diagonale  $D$  et la matrice  $P$  telle que  $D = PBP^{-1}$ .

d. Exprimer  $A^n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 4 : (5 pts)**

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^4 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0; 0)$  et

$$f(0; 0) = 0.$$

1. Déterminer  $Df$

2. Montrez que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  et déduire que  $x^4 + y^2 \geq 2x^2y$ .

3. Montrer que  $f$  est continue au point  $(0; 0)$ .

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ . Montrer que ses dérivées partielles sont continues partout sur  $\mathbb{R}^2$ .

CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT DE MILLE TRENTE-CINQ (1035)  
ELEVES PROFESSEURS CERTIFIES DES LYCEES ET COLLEGES A FORMER A  
L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE DE KOUDOUGOU (ENS-UK)  
POUR LE COMPTE DU MINISTRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE ET  
SUPERIEUR, SESSION DE 2015

NIVEAU : LICENCE

OPTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE DE SPECIALITE

Date : 06/08/2015

Coef. : 04

Durée : 04 heures

Exercice 1 (2pts)

Déterminer tous les couples d'entiers  $(x, y)$  vérifiant l'équation

$$(E) \quad 275x + 143y = 44.$$

On pourra simplifier l'équation (E) sous la forme  $ax + by = c$  où  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

Exercice 2 (3pts)

1. Déterminer les réels  $a, b, c$  et  $d$  pour que  $f$  soit dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$i) f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$ii) f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2 + dx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$iii) f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + c & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{dx^2 + 1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. Etudier la dérivabilité de  $f$  sur son domaine de définition.

$$x) i) f(x) = \begin{cases} \text{Arctan} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour cela on pourra considérer la fonction  $\varphi$  définie pour tout réel positif non nul  $x$ , par  $\varphi(x) = \text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x}$ . montrer que  $\varphi$  est constante et en déduire que  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$ .

$$ii) f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### Exercice 3 (2pts)

On rappelle que  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Soit l'application linéaire  $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $f \mapsto f''$ , où  $f''$  est la dérivée seconde de  $f$ . Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$  et les espaces propres associés.

### Exercice 4 (4pts)

Soit la fonction  $th$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$  où  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  et  $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

1. Etudier les variations de  $th$ .
2. Montrer que  $th$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $I$  que l'on indiquera.
3. En déduire que  $th$  admet une bijection réciproque que l'on notera  $Argth$ .
4. Déterminer l'expression logarithmique de  $Argth(x)$ .

### Exercice 5 (2pts)

Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie  $z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} - 7 = 0$ .

### Exercice 6 (4pts)

1. Calculer les intégrales  $\alpha = \int_1^3 x^2 \ln x dx$  et  $\beta = \int_0^1 x \sqrt{1-x^4} dx$  (on pourra poser  $x^2 = \sin t$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ).
2. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :
  - i)  $f(x) = \frac{x^6}{1+x^4}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
  - ii)  $g(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
  - iii)  $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{1+x}$ ,  $\forall x \in ]-1, +\infty[$ .

### Exercice 7 (3pts)

1. Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $] -\pi, \pi[$  par  $\psi(x) = \tan \frac{x}{2}$ . Montrer que  $\psi$  est une bijection de  $] -\pi, \pi[$  vers l'intervalle  $I = \psi(] -\pi, \pi[)$  que l'on précisera.
2. En déduire que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe un unique  $\alpha$  dans  $] -\pi, \pi[$  tel que  $x = \tan \frac{\alpha}{2}$ .
3. Pour tout réel  $x$ , on pose  $f(x) = \text{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} + \text{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .  
En posant  $x = \tan \frac{\alpha}{2}$ , déterminer l'expression de  $f(x)$  suivant la valeur de  $x$ .

$$x = \tan \frac{\alpha}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin \alpha = \frac{2x}{1+x^2} \\ \tan \alpha = \frac{2x}{1-x^2} \end{array} \right.$$

CONCOURS DIRECT DE RECRUTEMENT DE NEUF CENT SOIXANTE (960)  
ELEVES PROFESSEURS CERTIFIES DES LYCEES ET COLLEGES A FORMER A  
L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE DE KOUDOUGOU  
(ENS/UK), POUR LE COMPTE DU MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS  
SECONDAIRE ET SUPERIEUR, SESSION DE 2014

NIVEAU : LICENCE

OPTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE DE SPECIALITE

DATE : 11/08/2014

COEF. : 04

DUREE : 04 heures

**Exercice 1 (12pts)**

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^5$  est muni de sa base canonique  $B$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^5$  dont la matrice dans la base  $B$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres de  $f$  et montrer que  $f$  est diagonalisable.
- Déterminer une base  $C$  de  $\mathbb{R}^5$  dans laquelle la matrice  $D$  de  $f$  est diagonale.
- Déterminer  $D$  et la matrice  $P$  de passage de  $B$  à  $C$  puis calculer  $P^{-1}$ .
- En déduire  $A^n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .

**Exercice 2 (8pts)**

Montrer que a)  $2\text{Arctan}\frac{1}{2} = \text{Arctan}\frac{4}{3}$ .

b)  $\forall x > 0, \text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  et calculer  $\text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x}$  pour  $x < 0$ .

Soient  $a$  et  $b$  sont des réels. Montrer que  $\text{Arctan}a + \text{Arctan}b = \text{Arctan}\frac{a+b}{1-ab}$  si  $ab < 1$  et que  $\text{Arctan}a + \text{Arctan}b = \text{Arctan}\frac{a+b}{1-ab} + \varepsilon\pi$  si  $ab > 1$  où  $\varepsilon$  est le signe de  $a$ .

CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT SUR MESURES NOUVELLES  
DE PROFESSEURS DES LYCÉES ET COLLEGES POUR LE COMPTE DU  
MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE ET SUPERIEUR,  
SESSION DE 2012

NIVEAU : LICENCE

OPTION : MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ

DATE : 06/01/2013

COEF. : 04

DURÉE : 04 heures

Exercice 1 (6pts)

On munit  $\Omega = \mathbb{N}$  de la tribu  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , on pose :

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $\mu$  est une mesure sur  $\Omega$ .
- Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(\omega) = e^{-\omega}$ .
2. Dire pourquoi  $f$  est mesurable.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f_n$  la fonction  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f_n(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si } 0 \leq \omega \leq n \\ 0 & \text{si } \omega \geq n+1 \end{cases}$$

3. Montrer que  $f_n$  est une fonction étagée.
4. Montrer que la suite  $(f_n)$  tend en croissant vers  $f$ .
5. Montrer que la fonction  $f_n$  est intégrable et calculer son intégrale.
6. Montrer que  $f$  est intégrable. Calculer l'intégrale  $\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$ .

Exercice 2 (4pts)

On considère le système d'équations d'inconnues  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t = 0 \\ xt + y^2 + z^2 + t = 2 \\ x + y + z + t^2 = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que le point  $(0, -1, 1, 0)$  est solution.
2. Montrer que l'on peut résoudre ce système par rapport à  $(x, y, z)$  au voisinage de ce point.
3. Calculer la dérivée en 0 de l'application

$$t \rightarrow (x(t), y(t), z(t)).$$

### Exercice 3(4pts)

Soit  $E$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $k$  un réel non nul.

Montrer que l'inversion de pôle 0 et de puissance  $k$ ,  $f : E^* = E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par:  $f(x) = \frac{kx}{\langle x, x \rangle}$

est un difféomorphisme.

### Exercice 4(6pts)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subseteq X$  un sous-ensemble, on définit une application:

$$X \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto \inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, A).$$

1. Montrer que  $d(\cdot, A)$  est 1-lipschitzienne (donc continue).
2. Montrer que  $d(x, A) = d(x, \bar{A})$  et que  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $x \in \bar{A}$ .
3. Dédire des questions précédentes les propriétés suivantes:
  - i. Si  $A$  est fermé dans  $X$ , il existe une suite  $(O_n)_{n>0}$  d'ouverts de  $X$  tels que  $A = \bigcap_{n>0} O_n$ .
  - ii. Si  $A$  et  $B$  sont deux fermés disjoints de  $X$ , il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

EPREUVE DE SPECIALITE

28 décembre 2016.  
04 heures  
Coefficient : 04

Exercice 1 : (5 pts)

1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $z^3 = \sqrt{3} + i$

2) On donne la fonction sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$

Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  si elles existent.

Exercice 2 : (5pts)

On donne l'équation différentielle  $(E): x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3$

1) Considérons l'équation sans second membre associée :  $(E_0): x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0$

a) Déterminer la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  telle que  $y' = f(x)y$

b) Déterminer sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  les primitives de la fonction  $f$ .

c) On sait que la forme générale de la solution de l'équation  $(E_0): x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0$  est  $y(x) = ke^{F(x)}$  où  $F(x)$  est l'expression de la primitive de  $f$ . Déterminer la forme générale de la solution de l'équation  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$ .

En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation (E)

3) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (E)

### Exercice 3 : (5pts)

On considère l'ensemble  $A = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . un élément de  $A$  est un couple  $(x, y)$  de nombres réels. On munit  $A$  de deux lois notés « + » et « \* » définies par.

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1) Montrer que  $A$  est un groupe commutatif

2) Etude des propriétés de la loi « \* »

a) Montrer que la loi « \* » est commutative et associative

b) Déterminer l'élément neutre pour la loi « \* » .

c) Montrer que la loi « \* » est distributive par rapport à la loi « + ».

d) Dédurre que  $(A; +; *)$  est un anneau

### Exercice 4 : (5 pts)

On donne le matrice suivante:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

1) Calculer le déterminant de la matrice A

2) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.

3) Déterminer les valeurs propres de A.

4) A est-elle diagonalisable ? Justifiez-vous. Dans le cas où la matrice est diagonalisable, déterminer la matrice diagonale et la matrice de passage.

CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES PROFESSEURS  
CERTIFIES DES LYCEES ET COLLEGES D'ENSEIGNEMENTS GENERAL ET  
TECHNIQUE A FORMER A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE  
DE KOUDOUGOU (ENS/UK), SESSION DE 2010.

EPREUVE DE SPECIALITE : MATHEMATIQUES

DUREE : 04 heures

COEF. : 04

exercice 1

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  est muni de sa base canonique  $B$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base  $B$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $f$  et montrer que  $f$  est diagonalisable.
2. Déterminer une base  $C$  de  $\mathbb{R}^4$  dans laquelle la matrice  $D$  de  $f$  est diagonale.
3. Déterminer  $D$  et la matrice  $P$  de passage de  $B$  à  $C$ . En déduire  $A^n$  pour tout entier  $n$  naturel non nul  $n$ .

exercice 2

On considère l'espace  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\| \cdot \|_{\infty}$  et l'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall u \in E, \varphi(u) = \int_0^1 t \sin(u(t)) dt.$$

- a) Montrer que  $\varphi$  est lipschitzienne sur  $E$ . Est-elle linéaire ?
- b) Soit  $(u_n)$  la suite de  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $u_n(t) = \frac{n\pi t - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ . Montrer qu'elle converge dans  $(E, \| \cdot \|_{\infty})$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n(t))$ .

Soit  $E = M_2(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à éléments dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$\| \cdot \|_1$  définie par :  $\forall M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \|M\|_1 = |a| + |b| + |c| + |d|$ . On définit sur  $[0, 2\pi]$  la

suite  $(M_n)_{n>0}$  de  $E$  par  $M_n(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2n\theta - \theta^2}{n+1} & \theta \sqrt{n} e^{-n\theta} \\ n \sin \frac{\theta}{n} & \frac{n\theta + 1}{2n + \theta} \end{pmatrix}$ .

Démontrer que la suite  $(M_n)_{n>0}$  converge simplement vers une matrice  $M$  que l'on déterminera

CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT SUPPLEMENTAIRE DE CENT  
QUATRE VINGT QUATRE (184) ELEVES PROFESSEURS CERTIFIES DES  
LYCEES ET COLLEGES, OPTION ENSEIGNEMENT GENERAL, A FORMER  
A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE DE KOUDOUGOU  
(ENS/UK), SESSION DE 2013

NIVEAU : LICENCE

OPTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE DE SPECIALITE

DATE : 31 août 2013

COEF. : 04

DUREE : 04 heures

Exercice 1 (5pts)

1. Montrer que  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $N(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  et représenter graphiquement la boule unité de cette norme.
2. Soient  $\delta$  la distance sur  $\mathbb{R}^2$  déduite de la norme  $N$ .  
Montrer que l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{x}{y} & \text{si } (|x| \leq y^2 \text{ et } y \neq 0) \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2 \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance  $\delta$ .

Exercice 2 (5pts)

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments d'un groupe  $G$  respectivement d'ordre  $m$  et  $n$ .

1. Montrer que si  $\text{pgcd}(m, n) = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont d'ordres mutuellement premiers.

2. Dans chacun des cas suivants, vérifier si  $a$  et  $b$  satisfont l'assertion de la question 1. et en déduire la conclusion.

(a)  $a = 2, b = 3$  dans  $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$

(b)  $a = 2, b = 3$  dans  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$

Problème (10pts)

On considère le plan euclidien  $\mathcal{P}$ . Pour  $A \in \mathcal{P}$ , et  $k \in \mathbb{R}^*$ , on définit l'inversion de pôle (ou centre)  $A$  et de rapport  $k$ , notée  $I_{A,k}$ .  $I_{A,k} : \mathcal{P} \setminus \{A\} \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{A\}$  qui à un point  $M$  associe le point  $M'$  défini par:  $\vec{AM}' = \frac{k}{AM^2} \vec{AM}$ .

1.a. Montrer les points  $A, M$ , et  $M'$  sont alignés.

b. Montrer que  $\vec{AM} \cdot \vec{AM}' = k$ .

2.a. Montrer que  $I_{A,k}$  est bijective.

b. Montrer que  $I_{A,k}$  est une involution.

3. Soient  $O \in \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé de  $\mathcal{P}$ ,  $k \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $I$  l'inversion de pôle  $O$  et de rapport  $k$ .

a. Montrer que pour tout point  $M(x, y)$  de  $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ ,  $I(M)$  a pour coordonnées  $(\frac{kx}{x^2+y^2}, \frac{ky}{x^2+y^2})$ .

b. En déduire que si le point  $M$  a pour affixe  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors  $I(M)$  a pour affixe  $\frac{k}{\bar{z}}$ .

4. Soient  $O \in \mathcal{P}$ ,  $k \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $I = I_{O,k}$ .

a. Montrer que l'ensemble des points de  $\mathcal{P} \setminus \{O\}$  invariants par  $I$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{k}$ , appelé cercle d'inversion.

b. Etablir que:

i. Une droite de  $\mathcal{P}$  est invariante par  $I$  si et seulement si elle passe par  $O$ .

ii. L'image par  $I$  d'une droite ne passant pas par  $O$  est un cercle passant par  $O$  (privé de  $O$ ).

iii. L'image par  $I$  d'un cercle passant par  $O$  (privé de  $O$ ) est une droite ne passant pas par  $O$ .

iv. L'image par  $I$  d'un cercle ne passant pas par  $O$  est un cercle ne passant pas par  $O$ .

**CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT DE CENT QUATRE VINGT DIX-HUIT (198) ÉLÈVES PROFESSEURS CERTIFIÉS DES LYCÉES ET COLLÈGES, A FORMER À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE L'UNIVERSITÉ DE KOUDOUGOU (ENS/UK), SESSION DE 2011**

**DATE :** 12 août 2011

**NIVEAU :** LICENCE

**OPTION :** MATHÉMATIQUES

**ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ**

**DURÉE :** 4 heures

**COEF. :** 04

Exercice 1 (10pts)

Soient  $X$  un espace topologique,  $x_0 \in X$ , et  $f$  fonction définie de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , où  $\bar{\mathbb{R}}$  est la droite numérique achevée obtenue en adjoignant à  $\mathbb{R}$  deux éléments  $+\infty$  et  $-\infty$  n'appartenant pas à  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$  dans  $X$  si, quel que soit  $\lambda < f(x_0)$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $X$  tel que :

$$x \in V \implies f(x) \geq \lambda.$$

I. Soient  $x_0 \in X$ ,  $f$  et  $g$  des fonctions numériques sur  $X$  qui sont semi-continues en  $x_0$ .

Etablir que :

1.  $f + g$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$ ;
2.  $\sup(f, g)$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$ ;
3.  $\inf(f, g)$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$ ;
4.  $fg$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$  si  $f \geq 0$  et  $g \geq 0$ .

II. On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement dans  $X$  si  $f$  est semi-continue inférieurement en tout point de  $X$ .

Soient  $X$  un espace topologique,  $x_0 \in X$ , et  $f$  fonction définie de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est semi-continue inférieurement dans  $X$ .
- (ii) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $f(x) \leq \lambda$  est un fermé;
- (iii) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $f(x) > \lambda$  est un ouvert.

2. Soient  $X$  un espace topologique,  $Y$  une partie de  $X$ , et  $\varphi$  la fonction caractéristique de  $Y$  dans  $X$ .

Montrer que  $Y$  est un ouvert si et seulement si  $\varphi$  est semi continue inférieurement dans  $X$ .

Exercice 2 (6pts)

Soient  $E$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $(x, y) \rightarrow (x|y)$ , et de la norme associée  $x \rightarrow \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ . Soit  $u$  un endomorphisme continu auto-adjoint de  $E$ , c'est à dire vérifiant, pour tous  $x$  et  $y \in E$ ,  $(x|u(y)) = (u(x)|y)$ . Soit  $f : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$f(x) = \frac{(x|u(x))}{(x|x)}$$

1. Montrer que l'application  $g$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow (x|u(x))$  est différentiable sur  $E$ . Calculer sa différentielle.
2. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $E \setminus \{0\}$  et calculer sa différentielle  $Df$ .
3. Montrer qu'un élément non nul  $a$  de  $E$  vérifie  $Df(a) = 0$  si et seulement si  $a$  est vecteur propre de  $u$ .

Exercice 3 (4pts)

On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}$  et de la mesure Lebesgue  $\lambda$ . Soient  $z = (a, b)$  un point de  $\mathbb{R}^2$ ,  $R$  un réel et  $\Delta_z$  la partie de  $\mathbb{R}^2$  constituée des points  $(x, y)$  tels que  $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$ . On note  $\Phi_z$  la fonction qui à  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  associe le nombre réel  $(x-a)(y-b)1_{\Delta_z}$ , où  $1_{\Delta_z}$  est la fonction caractéristique de  $\Delta_z$ .

1. Montrer que la fonction  $\Phi_z$  est intégrable.
2. En utilisant la formule de changement de variable, montrer que l'intégrale de  $\Phi_z$  vaut  $\int_{\Delta} xy d\lambda(x, y)$  où  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ .
3. En appliquant le théorème de Fubini, Calculer l'intégrale  $\int_{\Delta} xy d\lambda(x, y)$  et en déduire celle de  $\Phi_z$ .

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot u(x_i)$$

---

$$\sum_{i=1}^n x_i^2$$

CONCOURS DIRECT POUR LE RECRUTEMENT DE DEUX CENT (200)  
ELEVES PROFESSEURS CERTIFIES DES LYCEES ET COLLEGES A  
FORMER A L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'UNIVERSITE DE  
KOUDOUGOU (ENS-UK), SESSION DE 2012

NIVEAU : LICENCE

OPTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE DE SPECIALITE

DATE : 09/09/2012

COEF. : 04

DUREE : 04 heures

Exercice 1 (4pts)

Soit la courbe (C) définie par  $\rho = 1 + 2\cos\theta - 4\cos^2\theta$ .

1. Résoudre l'équation  $\rho(\theta - \pi) = -\rho(\theta)$  puis  $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$  et en déduire l'existence de points multiples
2. Etudier la variation de  $\rho$  et construire la courbe (C)

Exercice 2 (6pts)

Etude des application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient la condition (C) suivante

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad f(t+x) = \frac{f(t) + f(x)}{1 + f(t)f(x)}$$

1. Montrer que s'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $|f(x_0)| = 1$ , alors  $f$  est constante. Préciser toutes les fonctions constantes qui vérifient (C).  
On considère désormais  $f$  non constante.
2. Etablir la propriété suivante :  $|f(x_0)| < 1$  pour tout réel  $x$ . En déduire  $f(0) = 0$ . Quelle est la parité de  $f$ ?
3. Démontrer que

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \frac{1 + f(nx)}{1 - f(nx)} = \left( \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \right)^n$$

4. On pose  $a = \frac{1+f(1)}{1-f(1)}$ . Calculer la valeur de  $f(x)$  en fonction de  $a$  successivement pour  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Q}$ .  
Dans ce qui suit, on suppose  $f$  continue en 0.
5. Prouver que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
6. En déduire la valeur de  $f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $f(x)$  à l'aide de la fonction th.  $th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

**Exercice 3 (5pts)**

Soit  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

1. Soit les entiers  $k, n$  tels que  $n > k \geq 0$ . Prouver qu'il existe un nombre réel  $c_{n,k} \in ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$  tel que :  $F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n^2}f'(c_{n,k})$ .

2. Donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k})$ . En déduire le nombre  $A$  qui vérifie  $\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{A}{n} + o(\frac{1}{n})$ ,  $n \rightarrow +\infty$

3. Démontrer de même que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{A}{n} + o(\frac{1}{n})$ ,  $n \rightarrow +\infty$

**Exercice 4 (5pts)**

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 2$  un entier), rapporté à sa base canonique  $B$ . A tout vecteur  $x$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  on associe le vecteur

$x'$  de  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_p)$  tel que pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, p\}$ ,  $x'_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1, j \neq i}^p x_j$ .

1. Montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme que l'on notera  $f$ . Trouver sa matrice  $A$  relativement à la base  $B$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$ . Que peut-on en déduire pour  $f$ ?
3. On désigne par  $C$  la matrice carrée d'ordre  $p$  dont tous les termes sont égaux à 1.
  - a) Déterminer pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $C^n$ .
  - b) En déduire la matrice  $A^n$  tout entier naturel non nul  $n$ .

*Handwritten notes:*  
 $n \times n$   
 $n \times n$   
 $n \times n$   
 $n \times n$   
 $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(n+1)^2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1. (1 point)**

Montrer que dans  $\mathbb{R}^2$  deux vecteurs  $X = (x_1, x_2)$  et  $Y = (y_1, y_2)$

Sont linéairement indépendants si et seulement si  $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ .

**Exercice 2. (4 points)**

Soit  $N$  une matrice carrée de format  $(n, n)$  nilpotente, c'est-à-dire dont une puissance est nulle. Si  $p$  est le plus petit entier tel que  $N^p = 0$

1) Montrer que l'on a :  $(I_n - N)(I_n + N + \dots + N^{p-1}) = I_n = (I_n + N + \dots + N^{p-1})(I_n - N)$ .

2) En déduire :

a. que  $(I_n - N)$  est inversible ;

b. une expression de  $(I_n - N)$ .

3) Application : calculer l'inverse de la matrice  $M$  telle que,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3. (2 points)**

Résoudre le système de quatre équations linéaires à quatre inconnues :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 10x_4 = -10 \end{cases}$$

**Exercice 4. (3 points)**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Les matrices diagonales sont des matrices carrées à la fois triangulaires inférieures et triangulaires supérieures.

2) Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$ ,  $M_n(K)$ , la multiplication matricielle est commutative.

3) Si  $A$  et  $B$  sont des matrices telles que,  $A \times B$  soit défini, alors

$$(A \times B = 0) \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0).$$

4) Soit  $A$  une matrice inversible de  $M_n(K)$ , alors,  $\forall B \in M_n(K)$ ,  $(A \times B = 0) \Leftrightarrow (B = 0)$ .

5) Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application de  $F$  dans  $E$ . Si  $f$  et  $g$  sont bijectives alors  $g \circ f$  est bijective et  $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

**Exercice 5. (2 points)**

Pour chacune des assertions suivantes,

1) Déterminer sa négation ;

2) Préciser laquelle, de l'assertion initiale ou de sa négation, est vraie.

- a.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n.$
- b.  $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geq n.$
- c.  $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x) \Rightarrow (x \geq 0).$
- d.  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, -x < y < x.$

**Exercice 6. (2 points)**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille de parties d'un ensemble  $E$  et soit  $B$  une partie de  $E$ .

1) Montrer que :

$$B \cap \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

2) Montrer que :

$$B \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$

**Exercice 7. (4 points)**

Soient les équations différentielles :

$$(1) 2y' + 3y = t^2 + 1 \quad \text{et} \quad (2) 2y' + 3y = 0,$$

où (2) est l'équation différentielle sans 2<sup>nd</sup> membre associée à (1).

- 1) Déterminer toutes les solutions de (2).
- 2) Déterminer une fonction polynôme du second degré,  $f$ , solution de (1).
- 3) Montrer que  $g$  est solution de (1) équivaut à  $h = g - f$  est solution de (2).
- 4) Déterminer toutes les solutions de (1).

**Exercice 8. (2 points)**

- 1) Montrer que la série de terme général  $\frac{1}{n!}$ ,  $n \geq 0$ , converge. Soit  $S$  sa somme.
- 2) Montrer que :  $2 < S < 3$ .

