Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

Session 2026 : Concours direct d'entrée pour la préparation du CAP/PL MATHEMATIQUES (Professeur de Lycée)

Epreuve : ANALYSE **Durée : 3 heures**

Exercice 1

On considère les parties U et H de l'espace $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / x^2 + y^2 < x^3 + y^3\} \ et \ H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$$

1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2) Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit g_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par: $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$.

1) Etudier les variation de g_n. On calculera les limites de g_n aux bornes de D_{g_n}
2) a) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
   b) Montrer que : $1 \leq \alpha_n < e^2$
   c) Montrer que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$
   d) Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n, puis en déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
3) On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$
   a) Justifier que (α_n) est une suite convergente
   b) On note l la limite de (α_n). Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$ et en la $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Exercice 3

On considère les intégrales généralisées I et J suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad et \quad J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

1) Montrer que les intégrales I et J convergent sans les calculer.
2) Calculer chacune des intégrales I et J.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série numérique de terme général donné :

1) $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
2) $v_n = \frac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{n^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
3) $w_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (où a et b sont deux constantes positive données)

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

Session 2026 : Concours direct d'entrée pour la préparation du

CAP/PL MATHEMATIQUES (Professeur de Lycée)

Epreuve : ALGEBRE **Durée : 3 heures**

Exercice 1

Dans cet exercice Z désigne l'ensemble de nombres entiers relatifs.

On considère $A = \{a + b\sqrt{3} \ / \ (a\,;b) \in Z \times Z\}$ et $H = \{2p + 2q\sqrt{3} \ / \ (p\,;q) \in Z \times Z\}$.

1. Démontrer que $(A, +\,;\cdot)$ est un anneau.
2. Démontrer que H est un idéal de A.
3. A / H est-il un corps ?

Exercice 2

Dans $IR_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal 2, muni de la base $B = (P_0, P_1;\ P_2)$ telle que $P_0 : t \mapsto 1$; $P_1 : t \mapsto t$; $P_2 : t \mapsto t^2$, on considère l'application φ définie par

$$\varphi : IR_2[X] \times IR_2[X] \to IR$$
$$(P\,;Q) \mapsto$$
$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $IR_2[X]$
2. Montrer que P_1 est orthogonal P_0 et à P_2
3. Montrer que la base $B = (P_0, P_1;\ P_2)$ n'est pas orthogonale
4.

a. Trouver un polynôme non nul Q_2 de la forme $P_2 - aP_0$ orthogonal à P_0 et à P_1.

b. Déterminer $\|P_0\|$, $\|P_1\|$ et $\|Q_2\|$

c. En déduire une base orthonormée de $IR_2[X]$.

Exercice 3

Dans un espace vectoriel réel IR^3, muni de la base canonique $B = (e_1\,;e_2\,;e_3)$, on considère l'endomorphisme f tel que

$f(e_1) = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = -e_1 - 2e_2 - 3e_3$ et $f(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A associée à f.
2. Trouver une base C de vecteurs propres de f.
3. Ecrire la matrice D de f dans la base C
4. Calculer D^n, $n \in IN^*$
5. En déduire A^n, $n \in IN^*$

TSVP

Exercice 4

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. On dit qu'un groupe G est monogène lorsqu'il est engendré par un élément x de ce groupe.
2. Si dans un anneau A, tout élément x vérifie $x^3 = x$, alors, $6x = 0$.
3. Si ϕ un morphisme du groupe G dans le groupe G', alors Im ϕ est un sous-groupe distingué de G'.
4. Un groupe est d'ordre 8 si et seulement, il est isomorphe à $Z \,/\, 8Z$.
5. Toute application injective d'un ensemble fini dans un ensemble fini est bijective.
6. Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.