ENSEA

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUEE

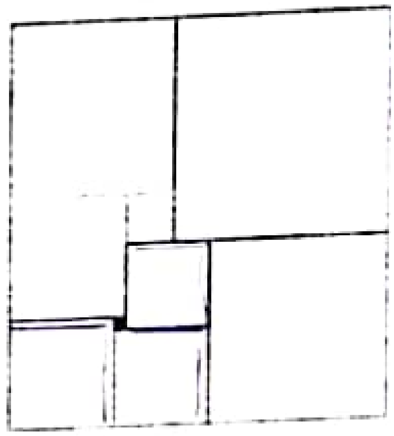
Abidjan - Cote d'Ivoire

Test de présélection au concours AS

1er mars 2025 — Durée : 3 heures

Exercice 1

La figure suivante représente un rectangle découpé en carrés. Calculer la longueur L et la largeur l de ce rectangle sachant que le petit carré noir a son côté qui mesure 4 cm.



Indications possibles :

- Poser x égal au côté de l'un des carrés autour du carré noir.
- Ecrire le côté de chacun des autres carrés en fonction de x puis déduire x par résolution d'équation.

Exercice 2

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n -ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n -ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n.
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1 .
   Calculer a_2 et b_2. (On pourra utiliser un arbre pondéré).
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
   puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.
3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$
   a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
   On précisera la raison et le premier terme U_1.
   b) En déduire l'expression de (U_n) en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,6665$

Exercice 3

Soit $A = (\sqrt{3} + i)^n$ où n est un entier naturel et $i^2 = -1$.

1. Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un nombre réel ?
2. Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit imaginaire pur ?
3. On appelle $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = 1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique)
   b) Montrer que $\bar{j} = j^2$
   c) Montrer $j^{-1} = j^7$
   d) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$

Exercice 4

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0{,}5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   c) En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   - décroît ;
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

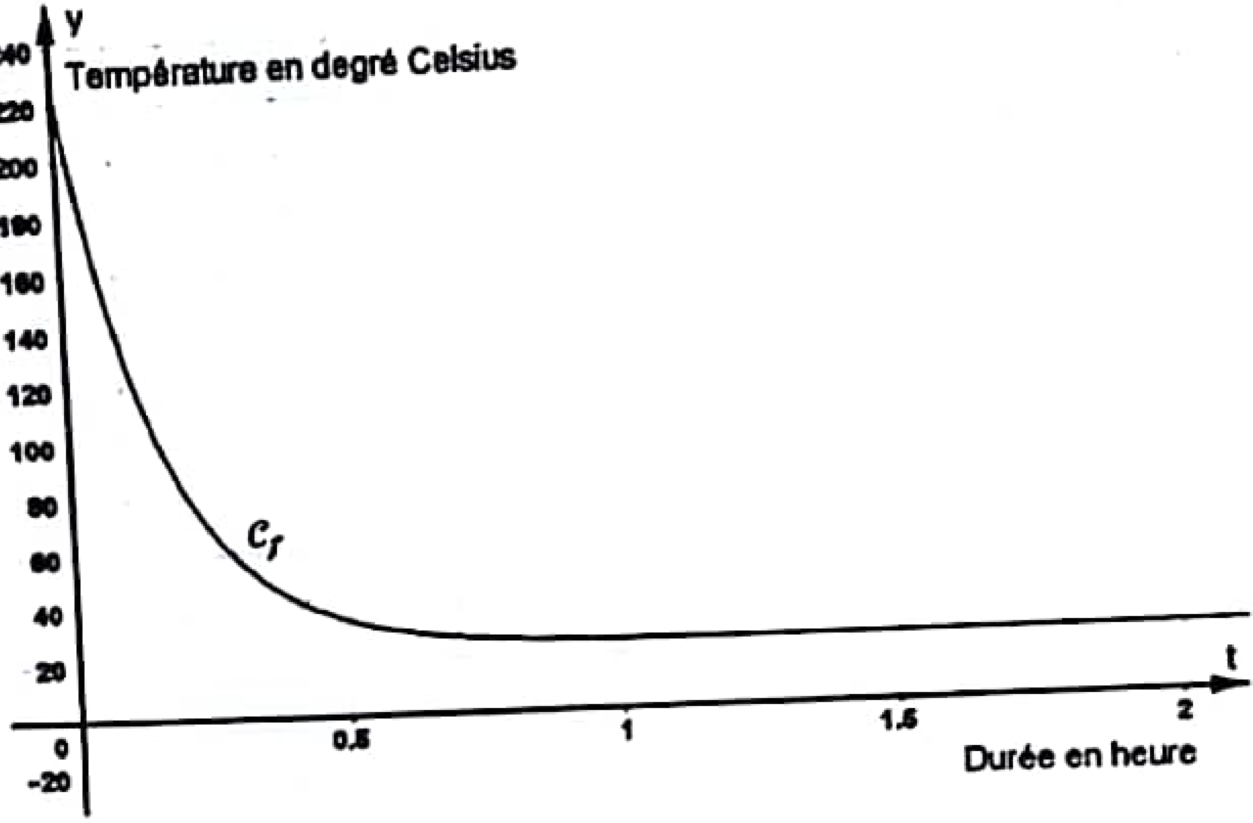
   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\,;\,+\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

4. Avec la précision permise par le graphique, lire T_0. On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.


y
Température en degré Celsius
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
$\mathcal{C}_f$
t
0.5
1
1.5
2
Durée en heure