



## ENSA 2019

# EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

### EXERCICE 1 : (/ 4 points)

1. Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

Déterminez l'ensemble de définition de  $f$ .

Déterminez sa fonction dérivée.

2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminez la valeur exacte du réel :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \sin t}$$

### EXERCICE 2 : (/ 6 points)

On considère dans le plan complexe les points  $A$  d'affixe 1;  $M$  d'affixe  $z$  et  $N$  d'affixe  $iz - (1 + i)$ . On note  $T_\lambda$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  barycentre des points pondérés  $\{(M; \lambda); (N; -\lambda); (A; 1)\}$  où  $\lambda$  est réel non nul.

1. Démontrer que, pour tout point  $M$  du plan, le point  $N$  est l'image de  $M$  par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2.

a- Démontrer que l'affixe  $z'$  de  $M'$  est telle que :

$$z' = \lambda(1 - i)z + \lambda(1 + i) + 1$$

b- Démontrer que  $T$  est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre, le rapport et l'angle.

Pour quelles valeurs de  $\lambda$ ,  $T_\lambda$  est-elle une rotation ?

Donner, dans chaque cas, son angle et l'affixe de son centre.

c- Exprimer les coordonnées  $(x' ; y')$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x ; y)$  de  $M$ .

3. Le nombre réel  $\lambda$  étant strictement positif, on lui associe le point  $P$  de coordonnées  $(-\ln \lambda; \ln \lambda)$

Soit  $P'$  le point tel que :  $P' = T_\lambda(P)$

a- Déterminer les coordonnées de  $P'$  en fonction de  $\lambda$ .

b- Démontrer que, lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$ , l'ensemble des points  $P'$  est la courbe  $(C)$  d'équation:  $y = 2(x - 1)\ln(x - 1) + (x - 1)$

**Problème : (/ 10 points)**

**Partie A : (/2 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$  et  $f(0) = 0$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 En donner une interprétation graphique.

Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2°) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par:  $\varphi(x) = \ln x + x + 1$ .  
Etudier les variations de  $\varphi$ . Etablir que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une solution  $\beta$  et une seule et que  $0,27 \leq \beta \leq 0,28$  (on ne demande pas de construire la courbe de  $\varphi$ )

3°) Pour  $x > 0$ , exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $\varphi(x)$ . En déduire le tableau de variations de  $f$ .

4°) Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $[\ln x - f(x)]$ . Qu'en déduire ?

5° ) Construire les courbes représentatives  $C$  de  $f$  et  $\Gamma$  de  $x \mapsto \ln x$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 4 cm )

**Partie B : (/3 points)**

On se propose d'étudier l'équation  $f(x) = 1$ . A cet effet, on introduit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$

1°) Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution  $\alpha$  et une seule et que :  $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$ .

Placer le point de  $C$  d'abscisse  $\alpha$ .

2° ) a) Prouver que l'équation  $f(x) = 1$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$ .

b) Étudier la monotonie de  $g$ .

c) Prouver que, pour tout élément  $x$  de  $[3,5; 3,7]$ ,  $g(x)$  appartient aussi à  $[3,5; 3,7]$ .

d) Établir que, pour tout élément  $x$  de  $[3,5; 3,7]$ ,  $|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$ .  
En déduire que :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$ .

3°) Soit  $(u_n)$  la suite d'éléments de  $[3,5; 3,7]$  définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = g(u_n)$  et la condition initiale :  $u_0 = 3,5$ .

a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^n}$ . En déduire la limite de  $(u_n)$ .

b) Préciser un entier  $n_0$  tel que  $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-3}$  et donner la valeur de  $u_{n_0}$ .

En déduire une valeur décimale approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

**Partie C (/5 points)**

On se propose d'étudier l'équation  $f(x) = n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1°) Montrer que, pour tout  $n$ , cette équation admet une solution  $\alpha_n$  et une seule.

(en particulier  $\alpha_1 = \alpha$ ).

2° ) Comparaison de  $\alpha_n$  à  $e^n$

a) Établir que  $f(e^n) \leq n$ . En déduire que :  $\alpha_n \geq e^n$ .

b) Prouver que la relation  $f(\alpha_n) = n$  peut s'écrire sous la forme:  $\ln \left( \frac{\alpha_n}{e^n} \right) = \frac{n}{\alpha_n} (1)$ .

c) En déduire, à l'aide de 1°, la limite de  $\frac{\alpha_n}{e^n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

3° ) Comparaison de  $\alpha_n$  à  $e^n + n$

On écrit  $\alpha_n$  sous la forme :  $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$ , où  $\varepsilon_n \geq 0$  (2).

1°) A l'aide de (1), exprimer  $(1 + \varepsilon_n)\ln(1 + \varepsilon_n)$  en fonction de  $n$ .

2°) Établir que pour  $t \geq 0$ :  $0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$ .

3°) Déduire de 1° et 2° que pour tout  $n \geq 1$ :  $\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$ , puis que

$$0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n} (3).$$

4°) A l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de  $e^n + n - \alpha_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .



THIAM SCIENCES



Préparation

AU CONCOURS  
ENSA

**MATIÈRE:**

- MATHS

**DATE:**

- Le 12 AVRIL 2024

**INSCRIPTION:**

**2.500 FCFA**



+221 77-850-82-72

