ENSAE (2019/2020)
TEST DE PRESELECTION - DURÉE = 4H

Chaque exercice est noté sur deux points (barème sur 40 points). Seuls les résultats dûment justifiés seront pris en compte.
Les documents et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$

Exercice 2

(1) Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$

(2) En déduire, si a est un réel différent de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, la résolution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}$$

Exercice 3

Soit $\alpha \in]0, \pi[$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos(\frac{\alpha}{2^k}), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la relation $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, calculer P_n en fonction de n, puis $\lim_{n \to +\infty} P_n$

Exercice 4

Soit la suite $u(n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = 2u_n + 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = \frac{u_n}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

(2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0.

Exercice 5

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{U_k U_{k+1}} = \frac{n+1}{U_0 U_{n+1}}$

(2) Application : calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis calculer sa limite.

Exercice 7

On pose $\begin{cases} u_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+2}}) \\ v_n = 2^n \tan(\frac{\pi}{2^{n+2}}) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

(1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

(2) Calculer leur limite commune.

Exercice 8

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $f_n(x) = x^n + x - 1$

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution $u_n \in [0, 1]$.

(2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9

(1) Déterminer les constantes réelles a, b, c telles que

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

(2) En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 10

(1) Montrer que $cotan(\theta) - 2cotan(2\theta) = \tan(\theta)$

(2) En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k}\tan(\frac{\theta}{2^k})$ en fonction de n et θ. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k}\tan(\frac{\theta}{2^k})$

Exercice 11

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ est elle continue en tout $m \in \mathbb{Z}$?
On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x}), \forall x \neq 0$, et $f(0) = 0$

(1) f est elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?

(2) Sa dérivée f' est elle continue en 0 ?

Exercice 13

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n-ième de f vérifie $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ où $P_n(x)$ est un polynôme vérifiant la relation : $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$.

Exercice 14

Etudier, puis représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^3+|x|}{x^2-|x|}$.

Exercice 15

Déterminer, suivant $n \in \mathbb{N}$, les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^n + ax + b}{x^2 - 1}$ puisse être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 16

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$ où $n \in \mathbb{N}/n \geq 2$

(1) Montrer que f atteint un minimum que l'on précisera.

(2) En déduire les inégalités :

(a) $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \forall x \in \mathbb{R}_+$

(b) $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n), \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

Exercice 17

Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(1+x^n)$

Exercice 18

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.
Combien peut on ainsi former de groupes constitués :

(1) uniquement d'hommes

(2) au moins d'une femme et au moins d'un homme.

Exercice 19

Soient A, B, C trois ensembles finis.

(1) Montrer que

$$card(A\cup B\cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A\cap B) - card(A\cap C) - card(B\cap C) + card(A\cap B\cap C)$$

(2) Application : Une classe de l'ENSAE comporte 34 élèves. parmi eux : 26 sont matheux, 20 sont sportifs et 7 sont musiciens. Aucun élève ne déteste à la fois les mathématiques, le sport et la musique. De plus, 4 sont matheux musiciens,15 matheux sportifs et 3 sont musiciens sportifs. Y a t-il un élève satifaisant les idéaux des Grecs, c'est à dire à la fois matheux, sportif et musicien ?

Exercice 20

Le bibliothécaire de l'ENSAE, après avoir codifié 4 livres de mathématiques, 6 livres de statistique et 5 livres d'économie, souhaite ranger ces documents sur une étagère.
De combien de façons peut il effectuer ce rangement :

(1) si les livres doivent être groupés par matières ?

(2) si les livres de mathématiques doivent être groupés ?

FIN DU SUJET