

École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique (ENSAE)



\*\*\*\*\*

## LA JUNIOR ENTREPRISE



\*\*\*\*\*

### FASCICULE ITSA

**ANNÉE ACADÉMIQUE : 2019-2020**

Give the floor to your data.

**ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE  
ECONOMIQUE  
TEST DE PRESELECTION POUR LE CONCOURS ITS VOIE A**

*Avertissement : le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune étant notée sur un point.*

*La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.*

- (1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x]$ .
- (2) Déterminer suivant les valeurs du réel  $\alpha$  les asymptotes de la courbe de la fonction  $f_\alpha$ , définie par :  $f_\alpha(x) = \frac{(\alpha^2+1)x^2 + \alpha^2 - 1}{(\alpha+1)x + \alpha - 1}$ .
- (3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a$  où  $a$  est un réel donné et strictement positif.
- (4) Simplifier l'expression  $B = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ .
- (5) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{3n} 3^{-2n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k} 3^{-2k}$ .
- (6) Déterminer explicitement  $f \circ f$  pour la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 3 - x$ , si  $x \in [0, 1[$  et  $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ , si  $x \in [1, 3]$ .
- (7) Factoriser le polynôme  $x^4 + x^2 + 1$  en produit de deux trinômes du second degré.
- (8) Déterminer les valeurs du paramètre réel  $a$  pour lesquelles la fonction  $f_a$  telle que  $f_a(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , admet trois extrémums.
- (9) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} \geq 2x - 3$
- (10) Etudier le sens de variation de la suite de terme général  $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ ,  $n \geq 3$ .
- (11) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel  $a$ , le nombre de solutions de l'équation  $x^3 - 3ax + 1 = 0$
- (12) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ .
- (13) Trouver le réel  $\alpha$  tel que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  vérifie :  $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (14) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la somme des cubes des  $n$  premiers entiers naturels impairs est égale à  $2n^4 - n^2$ .
- (15) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ . En déduire la partie entière du nombre réel  $A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .
- (16) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$ .

- (17) Déterminer le réel  $\alpha$  pour que le polynôme  $A(x) = x^4 - x + a$  soit divisible par le polynôme  $B(x) = x^2 - ax + 1$ .
- (18) Trouver les points pour lesquels la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$ , admet un extrémum ;  $n$  étant un entier naturel non nul fixé.
- (19) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 7 divise  $3^{2n} - 2^n$ .
- (20) Déterminer le réel  $m$  pour que l'équation  $(m - 1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$  ait deux solutions  $x'$  et  $x''$ , telles que  $x' < 2 < x''$ .

TEST DE PRÉSELECTION D'ÉLÈVES TECHNICIENS DES TRAVAUX  
STATISTIQUES  
DURÉE 4H

(1) Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

(2) Dériver les fonctions  $f$  et  $g$  définies ci-dessous :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} \text{ sur } ]0, +\infty[$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1\}$$

(3) Calculer la dérivée des fonction suivantes (on laissera les calculs apparents et on précisera l'ensemble sur lequel chaque fonction est dérivable)

$$f(x) = (3x + 1)\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$g(x) = 2 \cos 2x - 3 \sin 4x + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$h(x) = -t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t$$

(4) Résoudre les équations :

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x + x^3 + x^5 + x^7 = 0$$

(5) Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $\sqrt{\frac{-2x^2 + 3x - 1}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8}} \geq 0$

(6) Déterminer une fonction polynôme  $P$  de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines et telle que  $P(2) = 90$ .

(7) On définit une suite  $(U_n)$  par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1 \end{cases}$$

La suite  $(U_n)$  est-elle géométrique, arithmétique ?

(8) Déterminer un nombre  $x$  tel que les trois nombres :

$$25 \quad x \quad 16$$

soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.

(9) Calculer la valeur exacte de la somme :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + 4096$$

(10) Calculer la valeur exacte de :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{38}}$$

(11) Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0$$

(12) Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_n = \frac{3 \sin n + 2 \cos n + 5n}{n}$$

(13) Soit  $A(n) = \frac{1}{n(n+1)}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $A(n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ .

(b) Exprimer, en fonction de  $n$ , la somme suivante :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

(14) Résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 2x - y > 6 \\ x + y < 0 \\ 3x + 6y < 1 \end{cases}$$

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A DURÉE 3 HEURES

*Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.*

- 1 Etudier la limite en zéro des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sin x}; \quad g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad k(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \sin \frac{1}{x}; \quad l(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + 2}}$$

- 2 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation définie par

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{(x^4 + 5x^2 - 6)(x^5 - 4x)} \leq 0.$$

- 3 Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $\sqrt{\frac{-2x^2 + 3x - 1}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8}} \geq 0$

- 4 Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  la courbe  $C$  définie par l'équation  $y = f(x)$  admet-elle les asymptotes indiquées

$$f(x) = \frac{mx|x^2 - 1| - 2x|x| + 1}{x^2|x - 3| - x^3}, \quad \text{quatre asymptotes, d'équations :}$$

$$x = 0; \quad x = +\frac{3}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}; \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

- 5 On considère une suite arithmétique  $(a_n)_{n \geq 1}$  de raison  $r$  et une suite géométrique  $(b_n)_{n \geq 1}$  de raison  $q \neq 0$ .

Écrire en fonction de  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $r$  et  $q$  l'expression  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_k}$ .

- 6 Soit  $f(x) = \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ .

- a) Étudier les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .  
b) Déterminer son minimum sur cet intervalle et en déduire que

$$\sqrt{a+b} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq 2\sqrt{2}, \quad \forall a, b \text{ réels strictement positifs.}$$

- 7 Soit

$$P(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-b)(x-a)}{(c-a)(c-b)},$$

Calculer  $P(a)$ ,  $P(b)$ , et  $P(c)$ . En déduire  $P(x) = x^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- 8 Soit  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$  et  $h(y) = f(\alpha + y) - \beta$ . Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que la courbe représentative de  $h$  admette un centre de symétrie.

- 9 Calculer  $\sum_{k=2}^{1000} \frac{1}{k(k-1)}$

10 Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $f_1$  et  $f_n$  les fonctions définies pour tout  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculer  $f_{2011}$  (2011)

11 Dans chaque cas démontrer qu'il existe un couple de réels  $(a, b)$  tel que la courbe de  $f$  ait pour asymptote oblique la droite d'équation  $y = ax + b$  au voisinage de  $\alpha$ .

a)  $f(x) = -\frac{1}{3} \left[ 4(x+1) + 5\sqrt{x^2 + 2x - 2} \right]$  pour  $\alpha = +\infty$ .

b)  $f(x) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3x-4} + \sqrt{3x^2+4} \right]$  pour  $\alpha = -\infty$ .

12 Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1}$

Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition.

13 On considère une suite arithmétique  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Prouver que

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

14 Quelle condition doivent satisfaire les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax + b|x|$  soit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Quelle est alors la bijection réciproque

15 On considère la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Déterminer, s'il en existe, les points de la courbe représentative de  $f$  où la tangente admet  $m$  pour coefficient directeur, pour  $m \in \{-2, -1, 0, 2\}$ .

16 Soit une fonction  $f$ , continue sur le segment  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Pour tout entier naturel  $p$  non nul, on considère la fonction  $f_p$  définie sur  $\left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]$  par  $f_p(x) = f\left(x + \frac{1}{p}\right) - f(x)$ .

a) Calculer  $\sum_{k=0}^{p-1} f_p\left(\frac{k}{p}\right)$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul,  $p$ , il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = f\left(c + \frac{1}{p}\right)$ .

17 Soit  $f$  la fonction définie sur un segment  $[a, b]$  par  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f$  admette une fonction réciproque et définir alors  $f^{-1}$ .

18 Soit  $S_n = x + x(1-x^2) + x(1-x^2)^2 + \dots + x(1-x^2)^n$ . On pose  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ainsi définie puis simplifier l'expression de  $f(x)$ .

19 Soit  $x$  et  $y$  deux réels non nuls. Prouver que :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0.$$

20 On admet que le polynôme à coefficients réels :  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ , vérifie, pour tout nombre réel  $x$ , l'égalité :  $P(x+1) + P(x) = x^2$ .

a) Calculer  $P(0)$ ,  $P(1)$  et  $P(-1)$  et en déduire  $a$  et  $b$ .

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n)$  est entier naturel.

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A DURÉE 3 HEURES

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

- 1.) Etudier la limite en zéro des fonctions définie par :

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^4 - x^2}; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}; \quad k(x) = \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2}; \quad l(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

- 2.) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation définie par

$$\frac{(-3x^2 + 4x + 7)(5x^2 + 3x - 2)}{(x^2 - 4)(-3x^2 - 7x + 10)} \geq 0.$$

- 3.) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $\sqrt{\frac{3x^2 + 7x + 8}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8}} \geq 0$

- 4.) Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}, \quad u(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2 + 3x - 4}; \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2; \quad h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

- 5.) On considère la suite  $(U_n)$  telle que

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad u_0 = 2/3.$$

Calculer  $s_n = \sum_{i=0}^n u_i$  en fonction de  $n$ .

- 6.) Montrer que si une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  admet sur ce segment une fonction réciproque,  $f$  est monotone sur  $[a, b]$ .

- 7.) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où  $\alpha$  est un rationnel strictement positif puis la continuité de la fonction dérivée.

- 8.) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

a) Déterminer  $a, b, c$  pour que  $(C)$  ait les propriétés suivantes :

- $(C)$  passe par le point  $A(0; 5)$
- la tangente à  $(C)$  au point  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à  $(C)$  au point  $B$  d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $-3$ .

b) Etudier les variations de la fonction  $f$  ainsi obtenue. Tracer  $(C)$ .

- 9.) On considère l'expression  $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right]$ .
- a) Vérifier que  $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2} = 0$  ( $n \in \{3, 4\}$ ).
- b) On pose  $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$ .  
Calculer  $(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v)$ . En déduire que,  
pour tout  $n \geq 3$  on a :  $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2} = 0$ .
- 10.) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $f_1$  et  $f_n$  les fonctions définies pour tout  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  par :
- $$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$
- Calculer  $f_{2021}(2021)$ .
- 11.) Soit la fonction  $f$  définie par
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{m\sqrt{x^2 + 3} - 2mx}{x^2 - 1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$
- Déterminer  $m$  et  $p$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 12.) Soit  $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$
- a) Montrer qu'un réel  $\alpha \neq 0$  est racine de  $P(x)$  si et seulement si  $\alpha$  est solution de
- $$\text{(E)} : \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0.$$
- b) En posant  $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ , Résoudre l'équation **(E)** et en déduire les racines de  $P(x)$ .
- 13.) Calculer  $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- 14.) Déterminez quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.
- 15.) Soit les nombres  $A$  et  $B$  définis par  $A = \frac{1,0000000002}{1,0000000004}$  et  $B = \frac{0,9999999996}{0,9999999998}$ .  
En utilisant les fonctions  $f(x) = \frac{1+2x}{1+4x}$  et  $g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}$ , déterminer le signe de  $A - B$ .
- 16.) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $1 + \frac{x+1}{x-1} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$ .
- 17.) On considère  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degrés respectifs  $n$  et  $q$  tels que pour tout  $x$   $P(x)Q(x) = 0$ .
- a) Prouver que  $P$  admet au moins  $n + 1$  racines ou que  $Q$  admet au moins  $q + 1$  racines.
- b) Soit  $f(x) = x + |x|$  et  $g(x) = x - |x|$ .  $f(x)$  et  $g(x)$  sont elles des fonctions polynômes ? Justifiez votre réponse.
- 18.) Soit  $S_n = x + x(1 - x^2) + x(1 - x^2)^2 + \dots + x(1 - x^2)^n$ . On pose  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .  
Préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ainsi définie puis simplifier l'expression de  $f(x)$ .
- 19.) Soit  $x$  et  $y$  deux réels non nuls. Prouver que :  $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0$ .
- 20.) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- (a)  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7
- (b)  $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$  est divisible par 11.

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A DURÉE 3 HEURES

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

- ① Calculer la limite en zéro des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x]; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

- ② Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \left[ x - E\left(\frac{1}{x}\right) \right]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right).$$

avec  $E(x)$  désignant la partie entière de  $x$ .

- ③ Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ? Justifier votre réponse.

- ④ Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  fixés. Calculer suivant les valeurs de  $a$  et  $b$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ .

- ⑤ a) Montrer que, si  $p < 0$ , la fonction  $f : x \mapsto x^3 + px + q$  admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$ .  
b) Calculer le produit  $M.m$  en fonction de  $p$  et  $q$ . En déduire que l'équation  $x^3 + px + q = 0$  admet trois racines distinctes si, et seulement si  $4p^3 + 27q^2 < 0$ .

- ⑥ Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  donné, résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a$ .

- ⑦ Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $f_1$  et  $f_n$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculer  $f_{2013}(2013)$

- ⑧ On considère dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$(E) \quad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

$a^\circ$ ) Montrer que  $x$  est solution de (E) si, et seulement si

$$(E') \quad |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1.$$

$b^\circ$ ) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $|u-2| + |u-3| = 1$ .

Conclure pour l'équation (E)

- ⑨ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0$$

- ⑩ Soit un polynôme  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  où  $a_i \in \mathbb{N} \forall i = 0, 1, \dots, n$ . Montrer que 1 est racine de  $B(x) = P(x) - S$ , où  $S$  est la somme des coefficients du polynôme  $P$ .  
Soit l'entier  $N$  s'écrivant sous la forme  $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ . En déduire que  $N$  est divisible par 9 si et seulement si  $S$  est divisible par 9.

- ⑪ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et tracer la courbe de  $f$  pour  $x \in [-2, 2]$ .

- ⑫ On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sum_{k=0}^3 |x - k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x - 4|$$

Construire les courbes de  $f$  et de  $g$  dans deux repères différents en déduire leurs extrêmes.

- ⑬ Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x|x|$  est bijective. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque  $g$  et définir  $g'$ .

- ⑭ Soit  $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

a° Montrer qu'un réel  $\alpha \neq 0$  est racine de  $P(x)$  si et seulement si  $\alpha$  est solution de l'équation

$$(\mathbf{E}'') \quad : \quad x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

b° En posant  $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ , Résoudre l'équation  $(\mathbf{E}'')$  et en déduire les racines de  $P(x)$ .

- ⑮ On pose  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

a° Déterminer les constantes réelles  $a, b$  et  $c$  telles que  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b° En déduire une expression simple de  $U_n$  en fonction de  $n$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

- ⑯ Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où  $\alpha$  est un rationnel strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de  $f$ .

- ⑰ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère les fonctions  $f_n, g_n$  et  $h_n$  définies sur  $]0, 1[$  par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n k x^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^n k^2 x^k.$$

a° Exprimer simplement  $f_n(x)$  sans le signe  $\sum$

b° Etablir une relation entre  $g_n(x)$  et  $f'_n(x) \forall x \in ]0, 1[$ . En déduire les expressions simplifiées de  $g_n(x)$  et de  $h_n(x)$  sans le signe  $\sum$ .

c° Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x)$ .

- ⑱ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\frac{(-x^2 + 3x + 4)(x^2 - x - 2)}{3x^2 + 4x - 7} \leq 0$ .

- ⑲ Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ .

- ⑳ On considère une suite arithmétique  $(a_n)_{n \geq 1}$  de raison  $r \neq 0$  avec  $a_n > 0, \forall n \geq 1$ . Prouver que :

a°  $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$ .

b°  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$ .

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A DURÉE 3 HEURES

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

- ① Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}).$$

- ② Montrer que pour tout réel  $x$  et  $y$  non nuls :

$$2 \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 3 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6 \geq 0.$$

- ③ Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes

- a) Montrer que si  $P$  et  $Q$  sont différents du polynôme nul, alors leur produit  $P \times Q$  n'est pas le polynôme nul.  
b) En déduire que si le produit  $P \times Q$  est le polynôme nul alors  $P$  ou  $Q$  est le polynôme nul. Cette propriété est-elle vérifiée par l'ensemble de fonctions numériques ?

- ④ Déterminez quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sachant que leur produit est 385

- ⑤ Déterminer suivant les valeurs du réel  $\alpha$  les asymptotes de la courbe de la fonction  $f_\alpha$ , définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{(\alpha^2 + 1)x^2 + \alpha^2 - 1}{(\alpha + 1)x + \alpha - 1}.$$

- ⑥ Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  donné, résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + \sqrt{x + a}} = a$ .

- ⑦ Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $f_1$  et  $f_n$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculer  $f_{2014}(2014)$

- ⑧ Simplifier l'expression  $B = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ .

- ⑨ Soit  $\varphi$  et  $h$  les fonctions définies par

$$\varphi(x) = x - E(x), \quad \text{et} \quad h(x) = |2x - 1|,$$

et soit  $f = h \circ \varphi$ , où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$

Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , paire et admet 1 pour période. Représenter graphiquement  $f$  en repère normé.

**T.S.V.P**

- ⑩ On considère la suite  $(U_n)$  telle que  $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $U_0 = \frac{2}{3}$ .

On pose  $V_n = U_n\sqrt{2} - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

- a) Etudier la nature de la suite  $(V_n)$  de terme général  $V_n$   
b) En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $S_n = \sum_{i=0}^n U_i$ .
- ⑪ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}$  et  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et tracer la courbe de  $f$  pour  $x \in [-2, 2]$ .
- ⑫ Résoudre le système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \leq 3 \\ 2 - x < x^2. \end{cases}$$

- ⑬ Trouver le réel  $\alpha$  tel que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}, x \in \mathbb{R}$  vérifie :

$$(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

- ⑭ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la somme des cubes des  $n$  premiers entiers naturels impairs est égale à  $2n^4 - n^2$ .

- ⑮ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ . En déduire la partie entière du

nombre réel  $A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

- ⑯ Déterminer le réel  $\alpha$  pour que le polynôme  $A(x) = x^4 - x + a$  soit divisible par le polynôme  $B(x) = x^2 - ax + 1$ .

- ⑰ Trouver les points pour lesquels la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$ , admet un extrémum ;  $n$  étant un entier naturel non nul fixé.

- ⑱ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 7 divise  $3^{2n} - 2^n$ .

- ⑲ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

a) Déterminer  $a, b, c$  pour que  $(C)$  ait les propriétés suivantes :

- $(C)$  passe par le point  $A(0; 5)$
- la tangente à  $(C)$  au point  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à  $(C)$  au point  $B$  d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $-3$ .

b) Etudier les variations de la fonction  $f$  ainsi obtenue. Tracer  $(C)$ .

- ⑳ Déterminer le réel  $m$  pour que l'équation  $(m - 1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$  ait deux solutions  $x'$  et  $x''$ , telles que  $x' < 2 < x''$ .

**FIN DU SUJET et BONNE CHANCE**

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A ( DURÉE 3 HEURES )

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

- ① Trouver trois nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  consécutifs d'une suite géométrique telle que

$$a + b + c = 310 \quad \text{et} \quad b^2 = 10c$$

- ② Soit  $f$  une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer la monotonie de  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  et  $g \circ g$ .

- ③ Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + \sqrt{x-1} - 1}{x}, \quad u(x) = \frac{(2x+1)^2(x+1)^2}{x^2+x-2}; \quad g(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2; \quad h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-x-1}}.$$

- ④ Démontrer que si  $2x + 4y = 1$  alors  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$

- ⑤ On considère la suite  $(U_n)$  telle que  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ , et  $u_0 = 2/3$ .

$$\text{Calculer } s_n = \sum_{i=0}^n u_i \text{ en fonction de } n.$$

- ⑥ Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x - 1} \cos \frac{1}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2\sqrt[3]{x} + 1}}{(x - 1)^2}$$

- ⑦ Soit  $f(x) = x^2$ .

a) Démontrer que quels que soient les réels  $a$  et  $b$  on a  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$ .

b) On pose  $g(x) = f[f(x)]$ . Déduire du a) que  $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[g(a) + g(b)]$ .

- ⑧ Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel  $a$ , le nombre de solutions de l'équation  $x^3 - 3ax + 1 = 0$

- ⑨ Soit  $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$  et  $T_n(x) = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1} \quad \forall x \in ]0, 1[$ .

a) Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  et de  $x$ .

b) Trouver une relation entre  $S'_n(x)$  (dérivée de  $S_n(x)$ ) et  $T_n(x)$ . En déduire une expression simple de  $T_n(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$  puis  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$  pour  $0 < x < 1$ . On admettra qu'on peut permuter limite et dérivée.

- ⑩ Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  définie telle que  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x - E(x)}$ ,  $x$  réel;

Etudier la fonction  $f$  ( variations, courbe).

*Tournez la page SVP*

- ⑪ Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$  converge vers 0
- ⑫ Etudier le nombre de solutions de l'équation  $(E) : x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 8 = 0$ .  
Puis encadrer chaque solution par deux entiers consécutifs.
- ⑬ Pour chaque entier  $k > 0$ , on définit une application  $f_k$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que  $f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .
- a) Étudier les variations des fonctions  $f_k$ .
- b) Démontrer que toutes les courbes  $\mathcal{C}_k$  des fonctions  $f_k$  passent par deux points fixes que vous déterminerez.
- ⑭ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f'(x) = xf(x)$
- b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0$   
Démontrer alors que les dérivées de  $f$  d'ordre impair sont nulles en 0.
- ⑮ Soit  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + 1}.$$

Déterminer  $a, b$  et  $c$  pour que la fonction  $f$  admette à la fois un extremum en  $-2$  et un extremum, égale à  $2$ , en  $0$ .

- ⑯ On considère la fonction  $f_{a,b}$  définie par  $f_{a,b}(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels donnés  
Calculer les dérivées  $f'_{a,b}(x)$  et  $f''_{a,b}(x)$ . En déduire l'expression générale des primitives de la fonction  $f_{a,b}$ .
- ⑰ Soit  $f(x) = \frac{x^2 - |x - a|}{x^2 + ax}$  où  $f$  est une fonction définie dans son domaine de définition avec  $a \in \mathbb{R}^*$  fixé.  
Existe-t-il une valeur de  $a$  telle que  $f$  soit dérivable au point  $a$  ?
- ⑱ Trouver les points pour lesquels la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$ , admet un extrémum ;  $n$  étant un entier naturel non nul fixé.
- ⑲ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $\sqrt{\frac{3x^2 + 7x + 8}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8}} \geq 0$ .
- ⑳ Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$ , et  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe représentative de  $f_\lambda$  dans un repère cartésien.
- a) Montrer que les tangentes à  $\mathcal{C}_\lambda$  au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles à une droite  $\Delta$  dont on donnera une équation cartésienne.
- b) Montrer que les tangentes à  $\mathcal{C}_\lambda$  au point d'abscisse 1 sont toutes concourantes en un point  $A$  dont on donnera les coordonnées.

**FIN DU SUJET et BONNE CHANCE**

## **Correction des épreuves**

# Corrigé 2008

Ecole Nationale de la Statistique et  
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique  
2007/2008

(ENSAE)

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A CORRIGÉ - TYPE

① Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x]$ .

$$\frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x] = \frac{1}{2} [6 + 4x + x^2] \quad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x] = 3$$

② Déterminons suivant les valeurs du réel  $\alpha$  les asymptotes de la courbe de la fonction  $f_\alpha$ , définie par:  $f_\alpha(x) = \frac{(\alpha^2 + 1)x^2 + \alpha^2 - 1}{(\alpha + 1)x + \alpha - 1}$ .

- Si  $\alpha = 0$  on a  $f_0(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ . La courbe de  $f$  est une droite privée du point  $A(1, 2)$ .

- Si  $\alpha = +1$ ,  $f_1(x) = \frac{2x^2}{2x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . La courbe de  $f$  est une droite privée du point origine  $O(0, 0)$ .

- Si  $\alpha = -1$ ,  $f_{-1}(x) = \frac{2x^2}{-2} = -x^2$ . La courbe de  $f$  est une parabole

- Si  $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ . La courbe de  $f$  admet une :

\* asymptote "verticale" d'équation  $x = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = x_\alpha$

\* asymptote "oblique" dont l'équation est obtenue par exemple par division euclidienne :

$$\begin{array}{r} (\alpha^2+1)X^2 + \\ -((\alpha^2+1)X^2 + \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X) \\ \hline \bullet - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X + \\ - \left( -\frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} \right) \\ \hline \bullet + \alpha^2 - 1 + \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha^2 - 1 \mid \frac{(\alpha+1)X + \alpha - 1}{\alpha+1} \\ \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}X - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} \\ \hline \alpha^2 - 1 \mid \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} \end{array}$$

L'équation de l'asymptote oblique est alors  $y = \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}x - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2}$

③ Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a$  où  $a$  est un réel donné et strictement positif.

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x+a = (a^2-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x^2 - (2a^2+1)x - a + a^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (2a^2+1)^2 + 4a - 4a^4 = (2a+1)^2 \geq 0$$

$$x_1 = a^2 + a + 1 \text{ et } x_2 = a^2 - a.$$

$a^2 + a + 1$  ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique :  $a^2 - a$

④ Simplifions l'expression  $B = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ .

On cherche à mettre  $20 + 14\sqrt{2}$  sous la forme  $(a+b\sqrt{2})^3$ . Par développement, et identification on a  $a = 2$ ,  $b = 1$

$$B = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4. \quad \boxed{B = 4}$$

⑤ Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{3n} 3^{-2n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k} 3^{-2k}$

$$2^{3n} 3^{-2n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{3n} 3^{-2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \boxed{0}.$$

$$\text{Car } 0 \leq \frac{8}{9} < 1$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k} 3^{-2k} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{8}{9}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{8}{9}\right)} \quad (\text{Somme des } (n+1) \text{ premiers}$$

termes d'une suite géométrique de raison  $q = \frac{8}{9}$  et de premier terme 1).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k} 3^{-2k} = \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = 9.$$

⑥ Déterminons explicitement  $f \circ f$  pour la fonction  $f$  définie par:

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x, & \text{si } x \in [0, 1[ \\ f(x) = 2 - \sqrt{x-1} & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

- si  $0 \leq x \leq 1$  on a  $-1 \leq -x \leq 0$  et  $2 \leq 3 - x \leq 3$ . Donc  $3 - x \in [1, 3]$ .

$$\text{Ainsi, } f \circ f(x) = f[f(x)] = 2 - \sqrt{f(x) - 1} = 2 - \sqrt{3 - x - 1} \\ f \circ f(x) = 2 - \sqrt{2 - x}.$$

- si  $1 \leq x \leq 2$  on a  $0 \leq x - 1 \leq 1$  et  $-1 \leq -\sqrt{x-1} \leq 0$ . Donc  $1 \leq 2 - \sqrt{x-1} \leq 2$  et donc  $f(x) \in [1, 3]$ .

$$\text{Ainsi, } f \circ f(x) = f[f(x)] = 2 - \sqrt{f(x) - 1} = 2 - \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}.$$

- si  $2 \leq x \leq 3$  on a  $1 \leq x - 1 \leq 2$  et  $-\sqrt{2} \leq -\sqrt{x-1} \leq -1$ . Donc  $2 - \sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{x-1} \leq 1$  et donc  $f(x) \in [0, 1]$ .

Ainsi,  $f \circ f(x) = f[f(x)] = 3 - f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ .

Conclusion: 
$$f \circ f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{2-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - \sqrt{1 - \sqrt{x-1}} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- ⑦ Factorisons le polynôme  $x^4 + x^2 + 1$  en produit de deux trinômes du second degré.

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

- ⑧ Déterminons les valeurs du paramètre réel  $a$  pour lesquelles la fonction  $f_a$  telle que

$$f_a(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}, \text{ admet trois extrémums.}$$

$$f_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'_a(x) = \frac{(2x+a)\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x^2+ax+5)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= \frac{(2x+a)(x^2+1) - x(x^2+ax+5)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2x^3 + 2x + ax^2 + a - x^3 - ax^2 - 5x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$f'_a(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Etudions le signe de  $\varphi_a(x) = x^3 - 3x + a$ .

$$\varphi'_a(x) = 3x^2 - 3.$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$\varphi'_a$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$\varphi_a$	$-\infty$	$2+a$	$a-2$	$+\infty$	

$f_a$  admet trois extrémum si  $(2+a)(a-2) < 0$  avec  $2+a > 0$  et  $a-2 < 0$ .

En d'autres termes  $\boxed{-2 < a < 2}$

⑨ Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation:  $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} \geq 2x - 3$

- si  $2x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3/2$  alors les solutions sont les éléments de l'intervalle  $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$

- si  $2x - 3 \geq 0$ , on élève au carré les deux nombres. On a :

$$3x^2 - 11x + 21 \geq 4x^2 - 11 + 9 \Rightarrow x^2 - x - 12 \leq 0 \Rightarrow \begin{matrix} -3 \leq x \leq 4 \\ x \geq 3/2 \end{matrix}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$S = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{3}{2}, 4 \right] = \boxed{\left] -\infty, 4 \right]}$$

⑩ Etudier le sens de variation de la suite de terme général  $u_n = \frac{2^n}{n^2}, n \geq 3$ .

On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2n^2 - n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2}$$

Or le trinôme du second degré  $x^2 - 2x - 1$  a pour discriminant réduit  $\Delta' = 2$  et pour racine  $1 - \sqrt{2}$  et  $1 + \sqrt{2}$ . Donc si  $x > 1 + \sqrt{2}$  alors  $x^2 - 2x - 1 > 0$ .

Comme  $n \geq 3 > 1 + \sqrt{2}$  alors  $n^2 - 2n - 1 > 0 \quad \forall n \geq 3$ .

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geq 3$ .

Par suite, la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

- Déterminons, suivant les valeurs du paramètre réel  $a$ , le nombre de solutions de l'équation  $x^3 - 3ax + 1 = 0$

Posons  $\varphi_a(x) = x^3 - 3ax + 1$ .

On a  $\varphi'_a(x) = 3x^2 - 3a$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$+\infty$			
$\varphi'_a$		+	0	-	0	+	
$\varphi_a$			$1 + 2a\sqrt{a}$		$1 - 2a\sqrt{a}$		$+\infty$

\* Cas où  $a \geq 0$

$$* \text{ si } \begin{cases} (1 + 2a\sqrt{a})(1 - 2a\sqrt{a}) < 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 - 4a^3 < 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

ou encore  $a \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ , alors l'équation admet 3 solutions

$$* \text{ si } \begin{cases} (1 + 2a\sqrt{a}) > 0 \\ (1 - 2a\sqrt{a}) > 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \implies \text{ si } 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \text{ il y a 1 seule solution}$$

\* Cas où  $a < 0$

On a  $\varphi'_a > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Donc  $\varphi_a$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
L'équation  $\varphi_a(x) = 0$  admet une seule solution réelle.

⑫ Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ .

$$\frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} = \frac{4^n \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 \right]}{5^n \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 \right]} = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ . Car  $\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$  sont compris entre 0 et 1.

On déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} = 0$

⑬ Trouvons le réel  $\alpha$  tel que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  vérifie:  $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

$f$  est dérivable. Posons  $U(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \frac{U'(x)}{2f(x)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{U''(x)\sqrt{U(x)} - \frac{(U'(x))^2}{2\sqrt{U(x)}}}{U(x)} = \frac{1}{4U(x)\sqrt{U(x)}} [2U''(x)U(x) - (U'(x))^2]$$

$$(1+x^2)f''(x) = \frac{(1+x^2)}{4U(x)f(x)} \left[ \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} (\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3) \right]$$

$$\text{et } xf'(x) = \frac{x(x + \sqrt{1+x^2})}{2f(x)\sqrt{1+x^2}}. \text{ Posons : } A = (1+x^2)f''(x) + xf'(x)$$

$$A = \frac{(1+x^2)}{4U(x)f(x)} \left[ \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} (\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3) \right] + \frac{x(x + \sqrt{1+x^2})}{2f(x)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{4U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}} [\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3 + 2x(2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1)]$$

$$= \frac{1}{4U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}} [\sqrt{1+x^2} + 2x^2\sqrt{1+x^2} + 2x^3 + 2x] = \frac{1 + 2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2}}{4U(x)f(x)}$$

$$= \frac{1}{4U(x)f(x)} U^2(x) = \frac{U(x)}{4f(x)} = \frac{1}{4} f(x) \text{ D'où } \alpha = \frac{1}{4}$$

⑭ Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la somme des cubes des  $n$  premiers entiers naturels impairs est égale à  $2n^4 - n^2$ .

Soit  $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$ . Montrons que  $S_n = 2n^4 - n^2$

Pour  $n = 1$ , on a  $S_1 = 1$  et  $2 \times 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ . Donc la relation est vraie au rang 1.

Supposons qu'elle est vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle l'est aussi au rang  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = S_n + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(n^4 + 6n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - \\ &\quad (n^2 + 2n + 1) \\ &= 2(n+1)^4 - (n+1)^2. \end{aligned}$$

Donc  $S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$ . D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$

⑮ Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a:  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ .

Comme  $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$  alors  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ .

Ainsi  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$  or  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ .

Donc  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

De même, on montre que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ et } \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

Par suite  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Déduisons-en la partie entière du nombre réel  $A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

D'après ce qui précède,

$$\sum_{k=1}^{10000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < A < \sum_{k=1}^{10000} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Donc  $\sqrt{10001} - 1 < A < \sqrt{10000}$ .

Ainsi,  $99 < \sqrt{10001} - 1 < A < 100$ . D'où  $E(A) = 99$

⑩ Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{n} + 1}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{n} + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{n} + 1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

⑪ Déterminons le réel  $\alpha$  pour que le polynôme  $A(x) = x^4 - x + a$  soit divisible par le polynôme  $B(x) = x^2 - ax + 1$ .

Faisons une division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2 - ax + 1 \\ -(x^4 - ax^3 + \quad \quad x^2) & \\ \hline \bullet \quad ax^3 & - \quad \quad x \\ - \quad (x^3 - \quad \quad a^2x^2 + \quad \quad ax) & \\ \hline \bullet \quad (a^2 - 1)x^2 & - \quad (a + 1)x + \quad \quad a \\ - \quad ((a^2 - 1)x^2 - \quad \quad a(a^2 - 1)x + \quad \quad (a^2 - 1)) & \\ \hline \bullet \quad (a^3 - 2a - 1)x & - \quad (a^2 - a - 1) \end{array}$$

$A(x)$  divisible par  $B(x)$  si et seulement si  $\begin{cases} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ a^2 - a - 1 = 0 \end{cases}$

$$a^2 - a - 1 = 0, \Delta = 1 + 4 = 5 \quad a_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad a_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Aucune des solutions de  $a^2 - a - 1 = 0$  n'est solution de  $a^3 - 2a - 1 = 0$ .

Donc  $B(x)$  ne divise pas  $A(x) \forall a$

⑫ Trouvons les points pour lesquels la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$ , admet un extrémum;  $n$  étant un entier naturel non nul fixé.

$$f'(x) = 2n \cos x \sin x [\sin^{2n-2}(x) + \cos^{2n-2}(x)]$$

$$f'(x) = 4n \sin(2x) [\sin^{2n-2}(x) + \cos^{2n-2}(x)]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_k = \frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$f$  s'annule en  $x_k$  en changeant de signe. Donc les points cherchés sont

$$x_k = \frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

①9) Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 7 divise  $3^{2n} - 2^n$ .

On peut le faire par deux méthodes :

1<sup>ère</sup> méthode : Développement de  $a^n - b^n$ .

Pour  $n = 0, 1 - 1 = 0$ . 0 divise 7.

Pour  $n = 1, 3^2 - 2 = 7$ . 7 divise 7.

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} \quad \forall n \geq 1$$

$$\cdot \text{ Donc } 3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9 - 2) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k} = 7 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k}.$$

On voit clairement que 7 divise  $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

2<sup>ème</sup> méthode : Par récurrence.

Pour  $n = 0, 1 - 1 = 0$ . 0 divise 7.

Pour  $n = 1, 3^2 - 2 = 7$ . 7 divise 7.

Supposons que 7 divise  $3^{2n} - 2^n$  pour un certain rang  $n$  et montrons que la relation est valable au rang  $n + 1$ .

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n$$

$$= (7 + 2) \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7(3^{2n}) - 2 \times (3^{2n} - 2^n)$$

- Par hypothèse de récurrence,  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7.

$$\text{Donc } 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7 \cdot 3^{2n} + 2 \times 7 \cdot \alpha_n = 7(3^{2n} + 2\alpha_n)$$

Donc 7 divise  $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

- ⑳ Déterminons le réel  $m$  pour que l'équation  $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$  ait deux solutions  $x'$  et  $x''$ , telles que  $x' < 2 < x''$ .

Pour  $m = 1$ , l'équation devient une équation du premier degré et admet une solution unique.

Pour  $m \neq 1$ , Calculons le discriminant :

$$\Delta = m^2 - 4(3m+1)(m-1) = m^2 - 12m^2 + 12m - 4m + 4 = -11m^2 + 8m + 4$$

$$\delta' = 16 + 44 = 60 = (2\sqrt{15})^2, m_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{15}}{11}, m_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{15}}{11}$$

$m$	$-\infty$	$m_1$	$m_2$	$+\infty$
$\Delta$	-	0	0	-

Comme nous cherchons des valeurs de  $m$  pour lesquelles l'équation a deux solutions alors  $m \in ]m_1, m_2[$ .

Et dans ce cas, on a  $x' = \frac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$  et

$$x'' = \frac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$$

$$x' < 2 < x'' \iff \frac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)} < 2 < \frac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$$

$$\iff m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} < 4(m-1) < m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}$$

$$\iff \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} < 3m - 4 < \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}$$

$$\iff |3m - 4| < \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} \iff (3m - 4)^2 < -11m^2 +$$

$$8m + 4$$

$$\iff 9m^2 - 24m + 16 < -11m^2 + 8m + 4 \iff 20m^2 - 32m +$$

$$12 < 0$$

$$\iff 5m^2 - 8m + 3 < 0.$$

On a :  $\Delta' = 16 - 15 = 1$ . Et  $m' = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$  et  $m'' = \frac{4+1}{5} = 1$

$m$	$-\infty$	$3/5$	$1$	$+\infty$
$5m^2 - 8m + 3$	+	0	-	0

Donc  $5m^2 - 8m + 3 < 0$  si  $m \in \left] \frac{3}{5}, 1 \right[$ .

Comme  $\left] \frac{3}{5}, 1 \right[ \subset ]m_1, m_2[$  alors l'ensemble recherché est  $\left] \frac{3}{5}, 1 \right[$ .

D'où  $\forall m \in \left] \frac{3}{5}, 1 \right[$ , l'équation  $(m - 1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$  admet deux solutions  $x'$  et  $x''$ , telles que  $x' < 2 < x''$ .

**FIN DU CORRIGÉ-TYPE**

# Corrigé 2012

Ecole Nationale de la Statistique et  
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique  
2011/2012

(ENSAE)

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A CORRIGÉ - TYPE

### 1. Limites:

•  $f(x) = \frac{(1 - \cos x)}{x^4 - x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1 - \cos x)}{x^4 - x^2} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + 2x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 (4x^2 - 4)} \end{aligned}$$

comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

•  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ . Posons  $y^6 = 1 + x$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} y \rightarrow 1 \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{3}{2}$$

$$\bullet k(x) = \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} k(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 7x^3 + 6x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}(x^2 - 7x + 6) \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 2$$

$$\bullet l(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \\ &= \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= 2 \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \frac{1}{4(1 + \sqrt{\cos x})} \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = \frac{1}{4}$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$   $\frac{(-3x^2 + 4x + 7)(5x^2 + 3x - 2)}{(x^2 - 4)(3x^2 - 7x + 10)} \geq 0$ . Cette fraction est définie dans  $\mathbb{R} - \{-2, -\frac{10}{3}, 1, 2\}$ . Posons  $A(x) = -3x^2 + 4x + 7$ ,  $B(x) = 5x^2 + 3x - 2$ ,  $C(x) = x^2 - 4$ ,  $D(x) = 3x^2 - 7x + 10$ . On alors le tableau de signes suivant:

$x$	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$-2$	$-1$	$\frac{2}{5}$	$1$	$2$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$A(x)$	-	-	-	0	+	+	+	+	0
$B(x)$	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$C(x)$	+	+	0	-	-	-	-	0	+
$D(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
	+	-	+	0	0	-	+	-	0

Ainsi,  $S = ]-\infty, -\frac{10}{3}[ \cup ]-2, \frac{2}{5}] \cup ]1, 2[ \cup ]\frac{7}{3}, +\infty[$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$I(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + 7x + 8}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8}} \geq 0$$

L'ensemble solution est le domaine de définition de  $I(x)$  car une racine est toujours positive. Le numérateur de la fraction dans la racine est toujours positif, car le polynôme correspondant a un discriminant  $\Delta = -37$ . 1 est racine du dénominateur et  $-x^3 + 7x^2 - 14x + 8 = (x-1)(-x^2 + 6x - 8)$ . On a ainsi le tableau de variations suivant:

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$-x^2 + 6x - 8$	-	-	0	0	-
$x - 1$	-	0	+	+	+
$I(x)$	+	-	+	-	-

Ainsi,  $S = ]-\infty, 1[ \cup ]2, 4[$

4. Calcul des fonctions dérivées:

$$\bullet f(x) = \frac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x^2 - 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}})x - 2x^3 + 3x - \sqrt{x} + 1}{x^2} \\ &= \frac{6x^3 - 3x + \frac{\sqrt{x}}{2} - 2x^3 + 3x - \sqrt{x} + 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } f'(x) = \frac{4x^3 - \frac{\sqrt{x}}{2} + 1}{x^2}$$

$$\bullet u(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2+3x-4}$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{[2(x+1)(x+2)^2 + 2(x+2)(x+1)^2](x^2+3x-4) - (2x+3)(x+1)^2(x+2)^2}{(x^2+3x-4)^2} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2+3x-4)^2} [(4x+6)(x^2+3x-4) - (2x+3)(x+1)(x+2)] \\ &= \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2} [2x^2+6x-8-x^2-3x-2] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } u'(x) = \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)(x^2+3x-10)}{(x^2+3x-4)^2}$$

$$\bullet g(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \left(\frac{x-1}{x+2}\right) \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-2(x-1)}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } g'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x+2)^3}$$

$$\bullet h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$\text{d'où } h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

5. Soit la suite  $(U_n)$  définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ où } u_0 = \frac{2}{3}. \text{ Calcul de la somme des } n \text{ premiers}$$

termes:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}u_{n+1} &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} + 1 \\ \sqrt{x}u_{n+1} - (n+1) &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n+2-2n-2}{2} \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{2} \\ \sqrt{2}u_{n+1} - (n+1) &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}u_n - n).\end{aligned}$$

Ainsi, si on définit  $v_n = \sqrt{2}u_n - n$  avec  $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , alors  $v_n$  serait une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et donc  $u_n = \frac{v_n+n}{\sqrt{2}}$ . On a donc:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n u_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{i=0}^n v_i + \sum_{i=0}^n i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)}{2} \right]\end{aligned}$$

d'où  $s_n = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)$

6. Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Puisque  $f$  est injective,  $f(a) \neq f(b)$ . Supposons que  $f(a) < f(b)$ . Soit  $x \in ]a, b[$ . Si  $f(x) \leq f(a)$ , l'image de l'intervalle  $[x, b]$  par la fonction continue  $f$  est un intervalle contenant  $[f(x), f(b)]$ , donc contenant  $[f(a), f(b)]$ .  $f(a)$  a donc un antécédent  $\alpha$  dans  $[x, b]$  et on a alors  $a \neq \alpha$  et  $f(\alpha) = f(a)$ , ce qui est contraire au fait que  $f$  soit injective. Ainsi, on n'a pas  $f(x) \leq f(a)$  et donc forcément  $f(x) > f(a)$ . Un même raisonnement permet de voir qu'on n'a pas  $f(x) \geq f(b)$ .

Soient maintenant  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[a, b]$  tels que  $a < x < y < b$ . En appliquant le même principe que précédemment aux segments  $[a, x]$  à  $y$  (resp.  $[y, b]$  à  $x$ ), on obtient  $f(x) < f(y) < f(b)$ .  $f$  est donc monotone. On utilise un même principe lorsque  $f(a) > f(b)$ .

7. Dérivabilité de la fonction par

$$f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

« J'ai raté 3000 lirs dans ma carrière. J'ai perdu presque 300 matchs. 26 fois, on m'a fait confiance pour prendre le tir de la victoire et j'ai raté. J'ai échoué encore et encore et encore dans ma vie. Et c'est pourquoi je reum. »  
Michael Jordan

où  $\alpha$  est un rationnel strictement positif.  
 On remarque que  $f$  est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur  $\mathbb{R}_+$

$$\forall x > 0, |f(x)| \leq |x|^\alpha \text{ car } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \forall x > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ et } f \text{ est continue en } 0.$$

Etudions la dérivabilité en 0. Posons  $\phi(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ . Ainsi,  $\phi(x) = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$ .  $\phi$  n'a donc pas de limite en 0 quand  $0 < \alpha \leq 1$  et que si  $\alpha > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$ . Etudions la dérivée:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

$$= x^{\alpha-2} \left[ \alpha x - \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right].$$

On en déduit que si  $\alpha \geq 2$ ,  $f'$  n'a pas de limite en 0. En conclusion:

- $0 < \alpha \leq 1$ :  $f$  est dérivable sur chaque segment de  $\mathbb{R}^*$
- $1 < \alpha \leq 2$ :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $\alpha > 2$ :  $f$  est dérivable de dérivée continue sur  $\mathbb{R}^*$

8. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - 2$  par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

a. La courbe  $(C)$  passe par  $A(0, 5)$  i.e  $f(0) = 5$  donc  $\frac{c}{2} = 5$  et donc  $c = -10$ .

b. La tangente au point  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses; donc

$$\frac{(2ax_0 + b)(x_0 - 2) - ax_0^2 + bx_0 - c}{(x - 2)^2} = 0 \text{ avec } x_0 = 0$$

$$-2b - c = 0$$

$$b = -\frac{c}{2}$$

$$b = 5$$

c. tangente au point  $B$  d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 3:

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3 \\ \frac{(2a+b)(1+2) - a - b - c}{(1-2)^2} &= -3 \\ -2a - b - a - b - c &= -3 \\ -3a - 2b - c &= -3 \\ -3a &= -3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

En conclusion,  $f(x) = \frac{x^2+5x-10}{x-2}$  et la droite d'équation  $y = x + 7$  est une asymptote de  $f$ . Représentation graphique de  $f$ :

9. Calculons  $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  Pour cela, posons:

a) Déterminons les constantes réelles  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On obtient  $a = c = \frac{1}{2}$  et  $b = -1$ .

b) Dédouons-en une expression simple de  $U_n$  en fonction de  $n$  puis calculons  $U_{100}$

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Ainsi, on a  $U_{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(100+1)(100+2)} = 0,24995$

10. Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de raison  $a$ :  $u_n = u_0 + na$ .

$$\begin{cases} u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} = 12 \\ u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 = 116 \end{cases}$$

En introduisant le terme général de la suite on a:

$$\begin{cases} 4u_0 + 4na + 6a = 12 \\ 4u_0^2 + 8na + \sum_{i=n}^{n+3} i^2 = 116 \end{cases}$$

Ce système admet deux solutions pour  $a$ :  $a = 4$  et  $a = -4$ .

- Si  $a = 4$ , les quatre termes de la suite sont  $-3, 1, 5, 9$ .

- Si  $a = -4$ , les termes consécutifs de la suite sont  $9, 5, 1, -3$ .

11. Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2-1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

Les points d'étude de la fonction sont 1 et -1. Pour  $|x| \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2-1} \\ &= \frac{m(x^2+3 - (2x)^2)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \frac{m(-3x^2+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \frac{-3m}{\sqrt{x^2+3}+2x} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-3m}{4}$ . Si  $f$  est continue en 1, alors  $\frac{-3m}{4} = 3 + p$ , soit  $3m + 4p = -12$ . De même de (il me semble aussi qu'il y a une erreur. Je vais relever.)

12. Soit  $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$ . 0 n'est pas racine de  $P$  car  $P(0) = 1$ .  
Soit  $\alpha \neq 0$

a.

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\iff \alpha^4 - \alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \\ &\iff \alpha^2(\alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}) = 0 \text{ et puisque } \alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0 \end{aligned}$$

b. Posons  $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ . Puisque  $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}$ , on en déduit que  $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = u^2 - 2$ . Dès lors, l'équation (E) devient:

$$u^2 - u - 6 = 0$$

Cette équation admet  $-2$  et  $3$  comme solution. On a alors les deux équations suivantes, permettant de déterminer  $\alpha$ :  $\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2$  et  $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ . En conclusion, l'ensemble solution  $S$  de (E) est

$$S = \{1, x_1, x_2\} \text{ où } x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

13.  $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right]$

a. La vérification de l'équation donnée est immédiate.

b. On pose  $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$ . On remarque que :  
 $u \cdot v = 1$  et  $u + v = 2x$ .

$$\begin{aligned} (u^{n-1} + v^{n-1})(u + v) &= u^n + u^{n-1}v + v^{n-1}u + v^{n-1}u + v^{n-2} \\ &= u^n + v^n + u^{n-2} + v^{n-2} \end{aligned}$$

On remarque que  $P_n(x) = \frac{1}{2^n}(u^n + v^n)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2} &= \frac{1}{2^n}[u^n + v^n - 2xu^{n-1} - 2xv^{n-1} + u^{n-2} + v^{n-2}] \\ &= \frac{1}{2^n}[(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v) - 2x(u^{n-1} + v^{n-1})] \\ &= \frac{1}{2^n}[(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v - 2x)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

14. Soit la fraction continue définie par  $x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}$ ;  $a > 0, b > 0$ .

a.

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{1}{b + \frac{1}{x}} \\ &= a + \frac{x}{xb + 1} &= \frac{axb + a + x}{1 + xb} \end{aligned}$$

On en déduit que  $x$  est solution de l'équation suivante:

$$bx^2 - abx - a = 0$$

b. Après résolution de l'équation précédente ( $a > 0$  et  $b > 0$ ), on obtient deux solutions dont la solution positive est la suivante:

$$x = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2a}, \text{ soit } x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2a}.$$

• Pour  $x = 1 + \sqrt{3}$ , par identification, on a  $\frac{b}{2} = 1, b = 2$  et  $a = 1$ ,  
 $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}$

• Pour  $x = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}$ , par identification,  $b = 1$  et  $a = 3$ .  $x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}$

15. Soit

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) &= \frac{(1+2x)(1-2x) - (1-4x)(1+4x)}{(1-2x)(1+4x)} \\
 &= \frac{1-4x^2 + 1 + 16x^2}{(1-2x)(1+4x)} \\
 &= \frac{12x^2}{(1-2x)(1+4x)}
 \end{aligned}$$

$f(x) - g(x)$  est donc du signe de  $(1-2x)(1+4x)$  résumé dans le tableau suivant:

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1-2x$	+	+	+	0	-
$1+4x$	-	0	+	+	+
$f(x) - g(x)$	-	-	0	+	+

$f - g > 0$  sur  $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ . Et puisque,  $A = f(10^{-9})$  et  $B = g(10^{-9})$  et que  $10^{-9} \in ] -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ , on conclut que  $A - B > 0$ .

16. Résolution de l'équation  $\frac{x+1}{x-1} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$ . Posons  $Y = \frac{x+1}{x-1}$ . L'équation à résoudre devient  $1 + Y + Y^2 + Y^3 = 0$ . Le membre de gauche de l'équation est la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison  $Y$ . Ainsi, l'équation devient:

$$\frac{1 - Y^4}{1 - Y} = 0, \text{ avec } Y \neq 1.$$

Comme 1 n'est pas solution de l'équation en  $Y$ , on a:  $Y^4 = 1, Y = -1$ . En remplaçant  $Y$  par sa valeur, on obtient  $x = 0$ . 0 est donc la seule solution de l'équation.

17. a. Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degrés  $n$  et  $q$  tels que  $PQ = 0$ . Soient  $\{x_1, \dots, x_n\}$  les racines de  $P$  et  $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+q}\}$  les racines de  $Q$ . Puisque  $PQ = 0$ , si  $x_{n+q+1}$  est un réel différent des racines de  $P$  et  $Q$ , on a  $P(x_{n+q+1})Q(x_{n+q+1}) = 0$ , soit  $P(x_{n+q+1}) = 0$  ou  $Q(x_{n+q+1}) = 0$ .  $P$  admet donc au moins  $(n+1)$  racines ou  $Q$  admet

- a. On suppose que  $f$  n'admet ni maximum, ni minimum. Alors la dérivée de  $f$  ne s'annule jamais.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-a)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2-ax)}{(x^2-4x+3)^2} \\ &= \frac{-8x^2 + 6x - ax^2 + 4ax - 3a - 2x^3 + 2ax^2 + 4x^2 - 4ax}{(x^2-4x+3)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + ax^2 + 6x - 3a}{(x^2-4x+3)^2} \\ &= \frac{x^2(a-4) + 6x - 3a}{(x^2-4x+3)^2} \end{aligned}$$

Si  $f' \neq 0$ , alors le discriminant du numérateur de  $f'$  est négatif. On a:

$$\Delta = 12a^2 - 48a + 48$$

$$\Delta = 12(a^2 - 4a + 3) \Delta < 0 \iff a^2 - 4a + 3 < 0$$

$$\iff a \in ]1, 3[$$

En conclusion, pour  $a \in ]1, 3[$ ,  $f$  n'admet ni maximum, ni minimum.

- b.  $f$  admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$ . Pour cela, il faut que le numérateur de  $f'$  s'annule en deux points, et d'après les calculs précédents,  $a \in ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$ .
- c.  $f$  n'admet qu'un minimum. Il faut que le discriminant du numérateur s'annule et que la dérivée seconde de  $f$  soit strictement positive. On a ainsi  $a = 3$ .

# Corrigé 2013

Ecole Nationale de la Statistique et  
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique  
2012/2013

(ENSAE)

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A CORRIGE-TYPE

① Calcul de limite en zéro des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x]; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$- f(x) = \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x]$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} [(1+x)^4 - 1 - 4x] = \frac{1}{2} [6 + 4x + x^2] \quad \forall x \neq 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3}$$

$$- g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}. \text{ En posant } y^6 = 1+x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{3}{2}}$$

② Calcul des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \left[ x - E\left(\frac{1}{x}\right) \right]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right).$$

avec  $E(x)$  désignant la partie entière de  $x$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \left[ x - E\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$\forall x \neq 0 \quad \sin x \left[ x - E\left(\frac{1}{x}\right) \right] = x \sin(x) - \frac{\sin x}{x} \cdot x E\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et comme}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{car } x \left( \left(\frac{1}{x} - 1\right) \right) \leq x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \text{ et } x \left(\frac{1}{x}\right) \leq x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \left( \left(\frac{1}{x} - 1\right) \right) \text{ si } x < 0$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \left[ x - E\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 + x + 1) - 3(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x+1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^3 - 6x^2 - 4x - 2}{(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{-3 - 6 - 4 - 2}{5 * 3} = \frac{-15}{15} = -1$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) = -1}$$

③ Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$

par :  $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ? Justification.

$$\text{Posons } y_n^1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ et } y_n^2 = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

Si on pose  $x = \frac{1}{y_n^1}$ . Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $y_n^1 \rightarrow +\infty$  avec  $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n^1) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n^2) = -\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger par continuité  $f$ .

④ Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  fixés.

Calcul suivant les valeurs de  $a$  et  $b$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{b}{a})^n}{1 + (\frac{b}{a})^n}$$

• si  $a > b$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 1$

• si  $a = b$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 0$

• si  $a < b$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{a}{b})^n - 1}{(\frac{a}{b})^n + 1} = -1$

⑤ a) Montrons que, si  $p < 0$ , la fonction  $f : x \mapsto x^3 + px + q$  admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$ .

On a  $f'(x) = 3x^2 + p$  et  $f''(x) = 6x$ . Sur  $] -\infty; 0]$   $f''(x) < 0$  et sur  $]0; +\infty[$   $f''(x) > 0$  et donc  $f'(x) = 0 \iff 3x^2 + p = 0$  avec

$$p < 0 \iff x^2 = \frac{-p}{3} \iff x = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$$

Donc si  $p < 0$ ,  $f$  admet un maximum  $M$  sur  $] -\infty; 0]$  et un minimum  $m$  sur  $]0; +\infty[$ .

b) Calculons le produit  $M.m$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

$$\begin{aligned} M.m &= f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) \cdot f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) \\ &= \left[ \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q \right] \left[ \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q \right] \\ &= \left[ -\left(\frac{-p}{3}\right)\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q \right] \left[ \frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q \right] = \frac{4p^3}{27} + q^2 \end{aligned}$$

Déduisons-en que l'équation  $x^3 + px + q = 0$  admet trois racines distinctes si et seulement si  $4p^3 + 27q^2 < 0$ .  
 En effet,  $Mm < 0$  si et seulement si  $4p^3 + 27q^2 < 0$  et  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Donc  $f$  admet trois racines distinctes.

- ⑥ Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  donné, résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a$ .  
 Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x+a = (a^2-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x^2 - (2a^2+1)x - a + a^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (2a^2+1)^2 + 4a - 4a^4 = (2a+1)^2 \geq 0$$

$$x_1 = a^2 + a + 1 \text{ et } x_2 = a^2 - a.$$

$a^2 + a + 1$  ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique :  $a^2 - a$

- ⑦ Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $f_1$  et  $f_n$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  par :  $f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$ , et  $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ . Calculons  $f_{2013}(2013)$   
 Il suffit de calculer  $f_2, f_3$  et  $f_4$ .

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

$$\text{Donc } f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 1 - \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1}; f_3(x) = f_1(f_2(x)) = x$$

$$\text{et } f_4(x) = f_1(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{x}$$

Ainsi,  $f_n(x) = f_{n \bmod 4}(x)$ . Par suite,  $f_{2013}(2013) = f_1(2013) = 1 - \frac{1}{2013}$

⑧ On considère dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$(E) \quad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

a) Montrons que  $x$  est solution de (E) si, et seulement si

$$(E') \quad |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1.$$

Il suffit juste de remarquer que :

$$x+3-4\sqrt{x-1} = (2-\sqrt{x-1})^2 \text{ et } x+8-6\sqrt{x-1} = (3-\sqrt{x-1})^2.$$

D'où

$$(E') \quad |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1.$$

b) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $|u-2| + |u-3| = 1$ .

$$|u-2| + |u-3| = 1 \iff |u-2| = 1 - |u-3|$$

$$\iff \begin{cases} |u-3| \leq 1 \\ (u-2)^2 = 1 + (u-3)^2 - 2|u-3| \end{cases} \quad (\text{Après avoir enlevé les valeurs absolues,})$$

$$\iff \begin{cases} u-3 = u-3 \\ u \leq 3 \\ u^2 - 6u + 8 < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u-3 = -u+3 \\ u \geq 3 \\ u^2 - 6u + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } S_{(E'')} = [2; 3]$$

Conclusion pour l'équation (E)

$$\text{Pour (E), on pose } u = \sqrt{x-1} \iff \begin{cases} 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } S_{(E)} = [5; 10]$$

⑨ Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0$$

Pour  $x = 1$ , l'équation n'est pas vérifiée. Donc  $x = 1$  n'est pas solution.

$$\text{De plus, } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = \frac{1}{x} * \frac{1 - (\frac{1}{x})^8}{1 - \frac{1}{x}}$$

*je sais  
la method*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^8}\right) * \frac{x}{x-1} = \frac{x^8 - 1}{x^8} * \frac{1}{x-1}$$

Comme  $x \neq 1$  et  $x \neq 0$  alors  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0 \iff x^8 - 1 = 0$

$0 \iff x = \pm \sqrt[8]{1}$   
 D'où  $x = -1$  est la solution de l'équation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0$ .

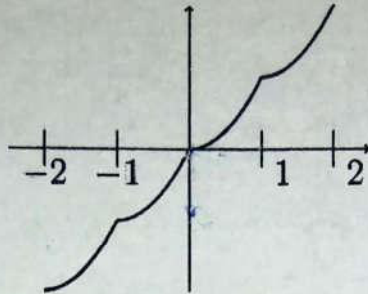
- ⑩ Soit un polynôme  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  où  $a_i \in \mathbb{N} \forall i = 0, 1, \dots, n$ . Montrer que 1 est racine de  $B(x) = P(x) - S$ , où  $S$  est la somme des coefficients du polynôme  $P$ .  
 $P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = S$ . Donc 1 est racine de  $B(x) = P(x) - S$ .  
 $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$   
 Déduisons que  $N$  est divisible par 9 si et seulement si  $S$  est divisible par 9. Démonstration par récurrence.  
 Si  $N = a_1 \times 10 + a_0$ .  $N$  est divisible par 9 ssi  $10a_1 + a_0 = 9k \iff 9a_1 + a_1 + a_0 = 9k \iff a_1 + a_0$  divisible par 9.  
 Supposons qu'au rang  $n$  on a le résultat et montrons qu'on l'a aussi au rang  $n+1$ . Posons aussi  $N_n$  l'entier au rang  $n$ .  
 $N_{n+1} = a_{n+1} \times 10^{n+1} + N_n \iff N_{n+1}$  est divisible par 9 ssi  $a_{n+1} + 9k + S_n$  divisible par 9.  
 $N_{n+1} = (1+9)^{n+1} a_{n+1} + 9k + S_n = [9^{n+1} + \sum_{k=1}^n 9^k + 1] a_{n+1} + 9k + S_n$ .  
 et donc c'est divisible par 9 ssi  $S_n + a_{n+1}$  divisible par 9.

- ⑪ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2, x \in \mathbb{R}$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Étudions la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et traçons la courbe de  $f$  pour  $x \in [-2, 2]$ .  
 $f$  est continue sur  $]n, n+1[ \forall n \in \mathbb{Z}$ . Donc étudions la continuité pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} n + (x - n)^2 = n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} n - 1 + (x - n + 1)^2 = n$$

Donc  $f$  est continue en  $n$ . D'où  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Construction de la courbe de  $f$



⑫ On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par

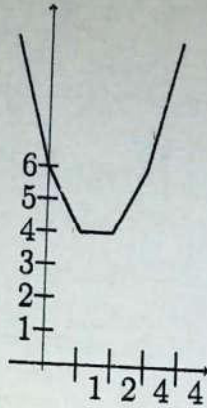
$$f(x) = \sum_{k=0}^3 |x - k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x - 4|$$

Construisons les courbes de  $f$  et de  $g$  dans deux repères différents et déduisons-en leurs extrémums.

$$f(x) = |x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|.$$

$$f(x) = \begin{cases} x + x - 1 + x - 2 + x - 3 = 4x - 6 & \text{si } x \geq 3 \\ x + x - 1 + x - 2 - x + 3 = 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x + x - 1 - x + 2 - x + 3 = 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - x + 1 - x + 2 - x + 3 = -2x + 6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x - x + 1 - x + 2 - x + 3 = -4x + 6 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 6 & \text{si } x \geq 3 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -4x + 6 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Pour  $g$ , c'est le même principe et on obtient:

- ⑬ Montrons que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x|x|$  est bijective.  
 $f$  est impaire  
 et  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ .  
 La restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  à  $\mathbb{R}_+$  et admet pour réciproque la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(x) = \sqrt{x}$ .  
 Il en résulte que  $f$  est une bijection définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et sa réciproque est  $g$  définie par:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction réciproque  $g$  et définir  $g'$ .  
 $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0. Et :

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

⑭  $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

- a) Montrons qu'un réel  $\alpha \neq 0$  est racine de  $P(x)$  si et seulement si  $\alpha$  est solution de l'équation (E'') :  $x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ .

$P(0) = 1 \neq 0$ . Donc 0 n'est pas racine de  $P(x)$ .

$$P(\alpha) = 0 \iff \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

$$\iff \alpha^2(\alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}) = 0 \quad \text{car } \alpha \neq 0.$$

$$\text{D'où } \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

b)  $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ , Résolvons l'équation (E'') et déduisons-en les racines de  $P(x)$ .

$$(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}. \text{ Donc } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = u^2 - 2.$$

$$(E'') \text{ devient } u^2 - 2 - u - 4 = 0 \iff u^2 - u - 6 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont -2 et 3.

$$u = -2 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \iff \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = -1$$

$$u = 3 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \iff \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$$

$$\iff \alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

. Au total, l'ensemble des solutions est  $S = \{-1, \alpha_1, \alpha_2\}$

⑮ On pose  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

a) Déterminons les constantes réelles  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient  $a = c = \frac{1}{2}$  et  $b = -1$ .

b) Déduisons-en une expression simple de  $U_n$  en fonction de  $n$  puis calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

Le génie est fait de 1% d'inspiration et de 99% de transpiration. Thomas Edison

$$x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1/4$

16) Étudions la dérivabilité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

où  $\alpha$  est un rationnel strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de  $f$ .

$f$  est impaire, il suffit de l'étudier sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$\forall x > 0, \quad |f(x)| = |x|^\alpha \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|^\alpha$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  et  $f$  est continue en 0.

Posons  $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$  et donc  $\varphi$  n'a pas de limite en 0 quand  $0 \leq \alpha \leq 1$  et si  $\alpha > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 \rightarrow f'(0) = 0$ .

De plus,  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$

$f'(x) = x^{\alpha-2} \left( \alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ . On en déduit que si  $\alpha \geq 2$ ,  $f$  n'a pas de limite en 0.

En somme,  $\begin{cases} 0 < \alpha \leq 1 & f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \\ 1 < \alpha \leq 2 & f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}^* \\ \alpha > 2 & f \text{ est dérivable et de dérivée continue sur } \mathbb{R}^*. \end{cases}$

- ①7) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère les fonctions  $f_n$ ,  $g_n$  et  $h_n$  définies sur  $]0, 1[$  par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n k x^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^n k^2 x^k.$$

- a) Exprimons simplement  $f_n(x)$  sans le signe  $\sum$ .  
 $f_n$  est une somme de termes d'une suite géométrique de raison  $x$ .

$$\text{Donc } f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

- b) Établissons une relation entre  $g_n(x)$  et  $f'_n(x) \quad \forall x \in ]0, 1[$ .

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^k = g_n(x) - n x^n + f_n(x) - x^n \end{aligned}$$

Déduisons-en les expressions simplifiées de  $g_n(x)$  et de  $h_n(x)$  sans le signe  $\sum$ .

De ce qui précède,  $g_n(x) = f'_n(x) + n x^n - f_n(x) + x^n$ .

$$f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + (n+1)x^n \\ &= \frac{n x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

On fait pareille en dérivant  $g_n$  et on obtient  $h_n(x) = g'_n(x) - 2g_n(x) - f_n(x) + (n+1)^2 x^n$

- c) Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}. \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 - x}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Vous calculerez la valeur de la limite après avoir calculer  $h_n$ .

⑱ Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\frac{(-x^2 + 3x + 4)(x^2 - x - 2)}{3x^2 + 4x - 7} \leq 0$ .  
Les racines des termes un à un sont:

- $-x^2 + 3x + 4$

$\Delta = 25$ . Donc les racines sont  $x_1 = \frac{-3-5}{-2} = 4$  et  $x_2 = \frac{-3+5}{-2} = -1$

- $x^2 - x - 2$

$\Delta = 9$ . Donc les racines sont  $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$  et  $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

- $-x^2 + 3x + 4$

1 est racine et l'autre racine est  $-\frac{7}{3}$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$-1$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$-x^2 + 3x + 4$	-	-	0	+	+	0	-
$x^2 - x - 2$	+	+	0	-	-	0	+
$3x^2 + 4x - 7$	+	-	-	+	+	+	+
$\frac{(-x^2 + 3x + 4)(x^2 - x - 2)}{3x^2 + 4x - 7}$	-	+	0	+	-	0	-

$$S = ]-\infty, \frac{7}{3}[ \cup ]1, 2] \cup [4, +\infty[ \cup \{-1\}$$

- ①9) Etudions la dérivabilité à droite en 0 de la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{0})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc la fonction  $f$  est dérivable à droite et elle n'est définie que sur  $\mathbb{R}_+$

- ②0) On considère une suite arithmétique  $(a_n)_{n \geq 1}$  de raison  $r \neq 0$  avec  $a_n > 0, \forall n \geq 1$ . Prouvons que :

$$a) \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

Par récurrence, pour  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} \\ &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-r} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{-r} = \frac{1}{r}(\sqrt{a_3} - \sqrt{a_1}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{a_3 - a_1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_1}} = \frac{2r}{r(\sqrt{a_3} + \sqrt{a_1})} = \frac{2}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_1}} \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie à l'ordre 3. Supposons vraie, la proposition jusqu'à un certain rang  $n$  et vérifions si elle l'est aussi à l'ordre  $n + 1$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}}_{\frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}} + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1} + \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n} \\ &= \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{(n-1)r} + \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{r} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{r} \\ &= \frac{a_{n+1} - a_1}{r(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1})} = \frac{nr}{r(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1})} = \frac{n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1}} \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie  $\forall n \geq 1$ .

$$b) \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Il suffit de remarquer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{a_n a_{n-1}} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n - a_1}{r a_1 a_n} = \frac{(n-1)r}{r a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} \end{aligned}$$

**FIN DU CORRIGÉ-TYPE**

# Corrigé 2014

Ecole Nationale de la Statistique et  
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique  
2013/2014

(ENSAE)

## TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A CORRIGÉ - TYPE

① Calculons les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}; \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2x - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$$

$$\text{Comme } \tan(x - \frac{\pi}{3}) = 2 \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) \times \frac{1}{1 - \tan^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})}$$

$$\text{et } 1 - 2 \cos x = 2[\cos \frac{\pi}{3} - \cos x] = -4 \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$$

quand  $x \neq \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\tan x \tan(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x} = \frac{1}{2 \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) [1 - \tan^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})]}$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x} = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{n}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

② Montrons que pour tout réel  $x$  et  $y$  non nuls :

$$(E) : 2 \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 3 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6 \geq 0.$$

Posons  $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  L'inéquation (E) devient alors :

$$2(a^2 - 2) - 3a + 6 \geq 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a + 6 \geq 0 \Rightarrow 2(a^2 - \frac{3}{2}a + 1) \geq 0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} - 4 < 0. \text{ Donc } a^2 - \frac{3}{2}a + 1 \geq 0 \quad \forall a$$

D'où (E) vraie quand  $x$  et  $y$  sont non nuls.

③ Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes

a) Montrons que si  $P$  et  $Q$  sont différents du polynôme nul, alors leur produit  $P \times Q$  n'est pas le polynôme nul.

Supposons  $P$  et  $Q$  différents du polynôme non nuls de degré  $p$  et  $q$ .

Donc  $\exists a_{i_0}$  et  $b_{k_0}$  tel que  $a_{i_0} \neq 0$  et  $b_{k_0} \neq 0$  et que  $P(x) = \sum_{j=0}^p x^j a_j$  et

$Q(x) = \sum_{j=0}^q x^j b_j$ . Donc  $PQ(x) = \sum_{j=0}^{p+q} a_i b_k x^j$  avec  $i + k = j$ .

Le terme  $x^{i_0+k_0}$  a pour coefficient  $a_{i_0} b_{k_0} \neq 0$ .

b) Dédudons-en que si le produit  $P \times Q$  est le polynôme nul alors  $P$  ou  $Q$  est le polynôme nul.

$P \times Q = 0$  donc  $\forall x PQ(x) = 0$ . Supposons  $P$  et  $Q$  différents du polynôme de degré  $p$  et  $q$ .

Alors on montre que  $P$  admet au moins  $(p + 1)$  racine ou que  $Q$  admet au moins  $(q + 1)$  racines facilement. Ainsi  $P = 0$  ou  $Q = 0$ .

Cette propriété n'est pas vérifiée par l'ensemble de fonctions numériques. Contre exemple:

Soit  $f(x) = x + |x|$  et  $g(x) = x - |x|$ . On a  $f(x).g(x) = 0 \forall x$

④ Déterminons quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sachant que leur produit est 385

Les quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sont :  $-7, -1, 5, 11$ .

Le produit est 385.

⑤ Déterminons suivant les valeurs du réel  $\alpha$  les asymptotes de la courbe de la fonction  $f_\alpha$ , définie par:  $f_\alpha(x) = \frac{(\alpha^2 + 1)x^2 + \alpha^2 - 1}{(\alpha + 1)x + \alpha - 1}$ .

- Si  $\alpha = 0$  on a  $f_0(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ . La courbe de  $f$  est une droite privée du point  $A(1, 2)$ .

- Si  $\alpha = +1$ ,  $f_1(x) = \frac{2x^2}{2x} = x \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . La courbe de  $f$  est une droite privée du point origine  $O(0, 0)$ .

- Si  $\alpha = -1$ ,  $f_{-1}(x) = \frac{2x^2}{-2} = x^2$ . La courbe de  $f$  est une parabole  
 - Si  $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ . La courbe de  $f$  admet une :

\* asymptote "verticale" d'équation  $x = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = x_\alpha$

\* asymptote "oblique" dont l'équation est obtenue par exemple par division euclidienne :

$$\begin{array}{r} (\alpha^2+1)X^2 + \\ -((\alpha^2+1)X^2 + \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X) \\ \hline \bullet - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X + \\ - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} \\ \hline \bullet + \alpha^2 - 1 + \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha^2 - 1 \mid \frac{(\alpha+1)X + \alpha - 1}{\alpha^2 + 1} X - \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} \\ \alpha^2 - 1 \mid \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} \end{array}$$

L'équation de l'asymptote oblique est alors

$$y = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}x - \frac{(\alpha^2 + 1)(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)^2}$$

⑥ Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  donné, résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a$ .  
 Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x+a = (a^2-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x^2 - (2a^2+1)x - a + a^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (2a^2+1)^2 + 4a - 4a^4 = (2a+1)^2 \geq 0$$

$$x_1 = a^2 + a + 1 \text{ et } x_2 = a^2 - a.$$

$a^2 + a + 1$  ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique :  $a^2 - a$

- ⑦ Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $f_1$  et  $f_n$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculons  $f_{2014}(2014)$   
Il suffit de calculer  $f_2, f_3$  et  $f_4$ .

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{f_n(x)} = f_1(f_{n-1}(x))$$

Donc  $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 1 - \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1}$  ;  $f_3(x) = f_1(f_2(x)) = x$

et  $f_4(x) = f_1(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{x}$

Ainsi,  $f_n(x) = f_{n \bmod 4}(x)$ . Par suite,  $f_{2014}(2014) = f_3(2014) = 2014$

- ⑧ Simplifier l'expression  $B = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ .

On cherche à mettre  $20 + 14\sqrt{2}$  sous la forme  $(a + b\sqrt{2})^3$ . Par développement, et identification on a  $a = 2, b = 1$

$$B = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4.$$

- ⑨ Soit  $\varphi$  et  $h$  les fonctions définies par

$$\varphi(x) = x - E(x), \quad \text{et} \quad h(x) = |2x - 1|,$$

et soit  $f = h \circ \varphi$ , où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$

Montrons que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , paire et admet 1 pour période.

$$f(x) = h(\varphi(x)) = |2(x - E(x)) - 1| = |2x - 2E(x) - 1|$$

$$f(x+1) = |2(x+1) - 2E(x+1) - 1| = |2x - 2E(x) + 2 - 2 - 1| = |2x - 2E(x) - 1| = f(x)$$

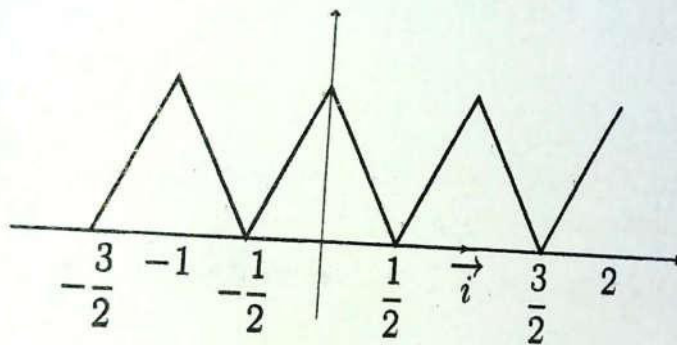
Donc  $f$  est périodique de période 1. Ainsi, il suffit d'étudier  $f$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . On a :

$$\begin{cases} \forall x \in ]0, \frac{1}{2}[ & \varphi(x) = x & f(x) = |2x - 1| = 1 - 2x \\ \forall x \in [-\frac{1}{2}, 0] & \varphi(x) = x - (-1) & f(x) = |2x + 1| = 2x + 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

De plus  $\left\| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$

Donc  $f$  est continue. La restriction de  $f$  à l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est paire et continue.

Représenter graphiquement  $f$  en repère normé.



⑩ On considère la suite  $(U_n)$  telle que  $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $U_0 = \frac{2}{3}$ .

On pose  $V_n = U_n\sqrt{2} - n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Étudions la nature de la suite  $(V_n)$  de terme général  $V_n$

$$V_n = U_n\sqrt{2} - n$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1}\sqrt{2} - (n+1) = \left(\frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} - (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}U_n + n + 2 - 2(n+1)) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}U_n - n) = \frac{1}{2}V_n. \text{ Donc} \end{aligned}$$

$V_n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme

$$V_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

b) Déduisons-en  $U_n$  en fonction de  $n$  et calculons  $S_n = \sum_{i=0}^n U_i$ .

Ainsi  $V_n = V_0 q^n$  où  $q$  est la raison de  $(V_n)$ . Dons  $V_n = \frac{2}{3} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Par suite, 
$$U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_n + n)$$

Et donc 
$$S_n = \sum_{i=0}^n U_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{i=0}^n V_i + \sum_{i=0}^n i \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1/2} \right) + \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$\sum_{i=0}^n U_i = \frac{4}{3} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} (n+1)$$

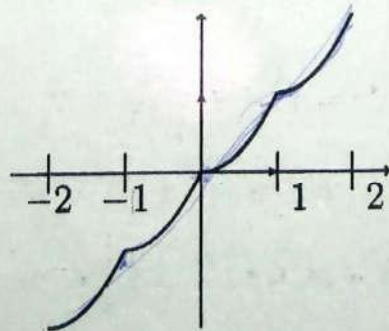
⑪ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Étudions la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et traçons la courbe de  $f$  pour  $x \in [-2, 2]$ .

$f$  est continue sur  $]n, n+1[ \forall n \in \mathbb{Z}$ . Donc étudions la continuité pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} n + (x - n)^2 = n \text{ et } \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} n - 1 + (x - n + 1)^2 = n$$

Donc  $f$  est continue en  $n$ . D'où  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Construction de la courbe de  $f$



12) Résolvons le système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \leq 3 \\ 2 - x < x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \leq 3 \\ 2 - x < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \leq 3 \\ x^2 - 1 \geq -3 \\ 2 - x < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 \geq -3 + 1 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, 2] \\ (x-1)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, 2] \\ x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S = ]1, 2]}$$

13) Trouvons le réel  $\alpha$  tel que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  vérifie:  $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 $f$  est dérivable. Posons  $U(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \frac{U'(x)}{2f(x)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{U''(x)\sqrt{U(x)} - \frac{(U'(x))^2}{2\sqrt{U(x)}}}{U(x)} = \frac{1}{4U(x)\sqrt{U(x)}} [2U''(x)U(x) - (U'(x))^2]$$

$$(1+x^2)f''(x) = \frac{(1+x^2)}{4U(x)f(x)} \left[ \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} (\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3) \right]$$

$$\text{et } xf'(x) = \frac{x(x + \sqrt{1+x^2})}{2f(x)\sqrt{1+x^2}}. \text{ Posons } A = (1+x^2)f''(x) + xf'(x)$$

$$A = \frac{(1+x^2)}{4U(x)f(x)} \left[ \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} (\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3) \right] + \frac{x(x + \sqrt{1+x^2})}{2f(x)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{4U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}} [\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3 + 2x(2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1)]$$

$$= \frac{1}{4U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}} [\sqrt{1+x^2} + 2x^2\sqrt{1+x^2} + 2x^3 + 2x] = \frac{1 + 2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2}}{4U(x)f(x)}$$

$$= \frac{1}{4U(x)f(x)} U^2(x) = \frac{U(x)}{4f(x)} = \frac{1}{4} f(x) \text{ D'où } \alpha = \frac{1}{4}$$

⑭ Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la somme des cubes des  $n$  premiers entiers naturels impairs est égale à  $2n^4 - n^2$ .

Soit  $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$ . Montrons que  $S_n = 2n^4 - n^2$

Pour  $n = 1$ , on a  $S_1 = 1$  et  $2 \times 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ . Donc la relation est vraie au rang 1.

Supposons qu'elle est vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle l'est aussi au rang  $n+1$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = S_n + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 = 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\ &= 2(n^4 + 6n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (n^2 + 2n + 1) \\ &= 2(n+1)^4 - (n+1)^2. \end{aligned}$$

Donc  $S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$ . D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$

⑮ Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a:  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ .

Comme  $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$  alors  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ .

Ainsi  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$  or  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ .

Donc  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

De même, on montre que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ et } \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

Par suite  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Déduisons-en la partie entière du nombre réel  $A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

D'après ce qui précède,

« Si quel qu'un est capable d'une chose, vous en êtes capable aussi. Il faut juste appliquer la bonne méthode. Tout le reste? C'est des excuses ». Yoann Romano

$$\sum_{k=1}^{k=10000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < A < \sum_{k=1}^{k=10000} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Donc  $\sqrt{10001} - 1 < A < \sqrt{10000}$ .

Ainsi,  $99 < \sqrt{10001} - 1 < A < 100$ . D'où  $E(A) = 99$

- 16) Déterminons le réel  $\alpha$  pour que le polynôme  $A(x) = x^4 - x + a$  soit divisible par le polynôme  $B(x) = x^2 - ax + 1$ .  
Faisons une division euclidienne.

$$\begin{array}{r} x^4 \phantom{- ax^3} + \phantom{x^2} \phantom{- ax} \phantom{+ a} \\ -(x^4 - ax^3 + \phantom{x^2}) \phantom{- ax} \phantom{+ a} \\ \hline \phantom{x^4} + ax^3 \phantom{+ x^2} \phantom{- ax} \phantom{+ a} \\ - (x^3 - \phantom{ax^2} + \phantom{ax}) \phantom{+ a} \\ \hline \phantom{x^4} \phantom{+ ax^3} + (a^2 - 1)x^2 \phantom{- ax} \phantom{+ a} \\ - ((a^2 - 1)x^2 - \phantom{ax}) \phantom{+ a} \\ \hline \phantom{x^4} \phantom{+ ax^3} \phantom{+ (a^2 - 1)x^2} + (a + 1)x \phantom{+ a} \\ - (a(a^2 - 1)x + (a^2 - 1)) \phantom{+ a} \\ \hline \phantom{x^4} \phantom{+ ax^3} \phantom{+ (a^2 - 1)x^2} \phantom{+ (a + 1)x} + (a^2 - a - 1) \phantom{+ a} \end{array}$$

$A(x)$  divisible par  $B(x)$  si et seulement si  $\begin{cases} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ a^2 - a - 1 = 0 \end{cases}$

$a^2 - a - 1 = 0$ .  $\Delta = 1 + 4 = 5$   $a_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$   $a_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Aucune des solutions de  $a^2 - a - 1 = 0$  n'est solution de  $a^3 - 2a - 1 = 0$ .  
Donc  $B(x)$  ne divise pas  $A(x) \forall a$

- 17) Trouvons les points pour lesquels la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$ , admet un extrémum;  $n$  étant un entier naturel non nul fixé.

$$f'(x) = 2n \cos x \sin x [\sin^{2n-2}(x) + \cos^{2n-2}(x)]$$

$$f'(x) = 4n \sin(2x) [\sin^{2n-2}(x) + \cos^{2n-2}(x)]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_k = \frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$f$  s'annule en  $x_k$  en changeant de signe. Donc les points cherchés sont

$$x_k = \frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(18) Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 7 divise  $3^{2n} - 2^n$ .

On peut le faire par deux méthodes :

1<sup>ere</sup> méthode : Développement de  $a^n - b^n$ .

Pour  $n = 0$ ,  $1 - 1 = 0$ . 0 divise 7.

Pour  $n = 1$ ,  $3^2 - 2 = 7$ . 7 divise 7.

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Donc } 3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9 - 2) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k} = 7 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k}.$$

On voit clairement que 7 divise  $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

2<sup>eme</sup> méthode : Par récurrence.

Pour  $n = 0$ ,  $1 - 1 = 0$ . 0 divise 7.

Pour  $n = 1$ ,  $3^2 - 2 = 7$ . 7 divise 7.

Supposons que 7 divise  $3^{2n} - 2^n$  pour un certain rang  $n$  et montrons que la relation est valable au rang  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n \\ &= (7 + 2) \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7(3^{2n}) - 2 \times (3^{2n} - 2^n) \end{aligned}$$

- Par hypothèse de récurrence,  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7.

$$\text{Donc } 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7 \cdot 3^{2n} + 2 \times 7 \cdot \alpha_n = 7(3^{2n} + 2\alpha_n)$$

Donc 7 divise  $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

(19) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

« Si nous avons le courage de les poursuivre,  
tous les rêves deviennent réalité »  
Walt Disney

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

a) Déterminons  $a, b, c$  pour que  $(C)$  ait les propriétés suivantes :

- $(C)$  passe par le point  $A(0; 5)$
- la tangente à  $(C)$  au point  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses;
- la tangente à  $(C)$  au point  $B$  d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $-3$ .

•  $(C)$  passe par le point  $A(0; 5)$

Donc  $f(0) = 5$ . Ainsi,  $\frac{c}{-2} = 5 \Rightarrow \underline{c = 10}$ .

• la tangente à  $(C)$  au point  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses;

Donc  $f'(0) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 2) - (ax^2 + bx + c)}{(x - 2)^2} = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-2b - c}{4} = 0 \Rightarrow -2b + 10 = 0 \Rightarrow b = 5.$$

• la tangente à  $(C)$  au point  $B$  d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $-3$

$$\text{Donc } f'(1) = 3. \text{ Ainsi } f'(1) = \frac{a - 4a - 2b - c}{1} = 3 \iff a = -1$$

Au total,  $\boxed{(a, b, c) = (-1, 5, -10)}$ .

$$\text{Aussi, } f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 10}{x - 2} \text{ et } f'(x) = \frac{-x^2 + 4x}{(x - 2)^2}$$

b) Étudions les variations de la fonction  $f$  ainsi obtenue.

$f$  est définie, continue et dérivable sur les ensembles  $] -\infty, 2[$  et  $]2, +\infty[$ .

$$\lim_{-\infty} f = +\infty, \lim_{+\infty} f = -\infty, \lim_{2^+} f = -\infty, \lim_{2^-} f = +\infty$$

Signe de  $f'$

$$f'(x) = 0 \iff -x^2 + 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4$$



⑳ Déterminons le réel  $m$  pour que l'équation  $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$  ait deux solutions  $x'$  et  $x''$ , telles que  $x' < 2 < x''$ .

Pour  $m = 1$ , l'équation devient une équation du premier degré et admet une solution unique.

Pour  $m \neq 1$ , Calculons le discriminant :

$$\Delta = m^2 - 4(3m+1)(m-1) = m^2 - 12m^2 + 12m - 4m + 4 = -11m^2 + 8m + 4$$

$$\delta' = 16 + 44 = 60 = (2\sqrt{15})^2, \quad m_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{15}}{11}, \quad m_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{15}}{11}$$

$m$	$-\infty$	$m_1$	$m_2$	$+\infty$
$\Delta$	-	0	0	-

Comme nous cherchons des valeurs de  $m$  pour lesquelles l'équation a deux solutions alors  $m \in ]m_1, m_2[$ .

$$\text{Et dans ce cas, on a } x' = \frac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$$

$$\text{et } x'' = \frac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$$

$$x' < 2 < x'' \iff \frac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)} < 2 < \frac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$$

$$\iff m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} < 4(m-1) < m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}$$

$$\iff \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} < 3m - 4 < \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}$$

$$\iff |3m - 4| < \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} \iff (3m - 1)^2 < -11m^2 +$$

$$8m + 4$$

$$\iff 9m^2 - 24m + 16 < -11m^2 + 8m + 4 \iff 20m^2 - 32m +$$

$$12 < 0$$

$$\iff 5m^2 - 8m + 3 < 0.$$

$$\text{On a : } \Delta' = 16 - 15 = 1. \text{ Et } m' = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5} \text{ et } m'' = \frac{4+1}{5} = 1$$

$m$	$-\infty$	$3/5$	$1$	$+\infty$	
$5m^2 - 8m + 3$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Donc  $5m^2 - 8m + 3 < 0$  si  $m \in \left] \frac{3}{5}, 1 \right[$ .

Comme  $\left] \frac{3}{5}, 1 \right[ \subset ]m_1, m_2[$  alors l'ensemble recherché est  $\left] \frac{3}{5}, 1 \right[$ .

D'où  $\forall m \in \left] \frac{3}{5}, 1 \right[$ , l'équation  $(m - 1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$  admet deux solutions  $x'$  et  $x''$ , telles que  $x' < 2 < x''$ .

**FIN DU CORRIGÉ-TYPE**

# PROPOSITION DE CORRECTION PRESLECTION 2017

## EXERCICE 1

Soit  $q$  la raison. On a donc  $b = qa$  et  $c = qb = aq^2$   
 $a + b + c = 310 \implies a + qa + q^2a = 310 \implies a(1 + q + q^2) = 310(a)$   
 $b^2 = 10c \implies q^2a^2 = 10aq^2 \implies a = 10(b)$   
 De (a) et (b) on a  $1 + q + q^2 = 31$  ce qui implique  $q + q^2 + 30 = 0$   
 $\Delta = 1 + 120 = 121$   
 d'où  $q = -6$  ou  $q = 5$   
 ☞ Si  $q = -6$  alors  $a = 10, b = -60$  et  $c = 360$   
 ☞ Si  $q = 5$  alors  $a = 10, b = 50$  et  $c = 250$

## EXERCICE 2

$f$  est croissante et  $g$  décroissante  
 ●  $f \circ g$  est décroissante et  $g \circ f$  est aussi décroissante  
 ●  $f \circ f$  est croissante et  $g \circ g$  est aussi croissante  
 En effet  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} / x \leq y, g(x) \geq g(y) \implies g \searrow \implies f(g(x)) \geq f(g(y))$

## EXERCICE 4

Si  $2x + 4y = 1$  alors  $y = \frac{1 - 2x}{4}$   
 $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{1 - 2x}{4}\right)^2 = \frac{16x^2 + 1 - 4x + 4x^2}{16} \\ \text{avec } y = \frac{1 - 2x}{4} \end{array} \right.$   
 $\frac{20x^2 - 4x + 1}{16} \geq \frac{1}{20} ??$   
 Posons  $f(x) = 20x^2 - 4x + 1; f'(x) = 40x - 4 = 0 \implies x = \frac{1}{10}$   
 $\frac{1}{16}f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{20}$   
 $f$  atteint son minimum en  $\frac{1}{10}$  donc on le résultat

## EXERCICE 5

$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $U_0 = \frac{2}{3}$   
 $S_n = \sum_{i=0}^n U_i = ??$  Posons  $V_n = \sqrt{2}U_n - n$   

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \sqrt{2}\left(\frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}U_n + n + 2 - 2n - 2) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}U_n - n) \\ &= \frac{1}{2}V_n \end{aligned}$$

$V$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  de premier terme  
 $V_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} U_n = \frac{1}{2}(V_n + n)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n U_i \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n V_i\right) + \sum_{i=0}^n i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{4}{3} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4}(n+1) \end{aligned}$$

## EXERCICE 6

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x - 1} \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$  Changement de variable soit  $h = x - 1$  et on pose  $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x - 1}$  et  
 $k(x) = \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$   
 $g(1+h) = \frac{\sqrt{(1+h)^2 - 2(1+h) + 2} - 1}{h} = \frac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h}$   
 $g(1+h) = \frac{h}{\sqrt{1+h^2} + 1}$   
 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} g(1+h) = 0$   
 D'autre part, comme  $|\cos(x)| \leq 1$  (borné)  
 donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x - 1} \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \left(\frac{1}{1-x}\right) \left(\frac{3}{x^2+x+1}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \left( 1 - \frac{3}{x^2+x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \left( \frac{x^2+x-2}{x^2+x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$   
 Posons  $y^6 = x^2 \implies \sqrt[3]{x^2} = y^{\frac{6}{3}} = y^2 \implies x = y^3$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} &= \frac{(y-1)^2}{y^3-1} \\ &= \frac{(y-1)^2}{((y-1)(y^2+y+1))^2} \\ &= \frac{1}{(y^2+y+1)^2} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1 \iff y \rightarrow 1$   
donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{9}$

### EXERCICE 7

Soit  $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} a) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

La différence

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{4} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

$$b) \quad g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

or d'après a)  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$

f étant croissante et positive donc  $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq$

$f\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}\right)$ . Les rôles joués par a et b dans a) sont joués par f(a) et f(b) donc

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(f(a)) + f(f(b))}{2} = \frac{1}{2}(g(a) + g(b))$$

### EXERCICE 8

Discutons suivant les valeurs de a le nombre de solutions de  $x^3 - 3ax + 1 = 0$

Posons  $\phi_a(x) = x^3 - 3ax + 1 \implies \phi'_a(x) = 3x^2 - 3a$

☞ Si  $a < 0$ ,  $\phi'_a(x) > 0$  pour tout x. Dans ce cas,  $\phi_a$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donc  $\phi_a(x) > 0$  admet une solution unique.

☞ Si  $a \geq 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$+\infty$
$\phi'_a$	+	0	-	+
$\phi_a$		$1 + 2a\sqrt{a}$		$+\infty$
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$		$1 - 2a\sqrt{a}$	

Si  $\begin{cases} (1 + 2a\sqrt{a})(1 - 2a\sqrt{a}) < 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 + 4a^3 < 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \iff$

$a \geq \frac{1}{3\sqrt{4}}$  alors l'équation admet 4 solutions.

Si  $\begin{cases} (1 + 2a\sqrt{a}) > 0 \\ (1 - 2a\sqrt{a}) > 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{3\sqrt{4}} \\ a \geq 0 \end{cases}$

Alors l'équation admet une solution

### EXERCICE 9

Remarque : Erreur sur l'énoncé  $T_n(x) = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}$ . La dernière puissance de x est n-2 au lieu de n-1. Mais si quelqu'un voit l'erreur, on suit sa démarche.

a) Calcul de  $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

$$\begin{aligned} Si \quad S_n(x) &= (x(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}))' \\ &= \left(x \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right)' \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} + x \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1-x^n}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} b) \quad S_n(x) &= 2 + 6x + \dots + n(n-1)x^{n-2} \\ &= 2(1 + 3x + \dots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}) \\ &= 2T_n(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} T'_n(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) \\ &\stackrel{\text{admis dans cet exo}}{=} \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right]' \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^2} \right)' \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \frac{1-x}{(1-x)^4}$$

## EXERCICE 10

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x - E(x)}$$

$x \in D_f$  ssi  $x \in [-1; 1] \setminus \{0, 1\} = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$

Si  $x \in ]-1, 0[$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x - (-1)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

Si  $x \in ]0, 1[$ ,  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Sur  $] -1, 0[$ ,  $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} < 0$

Sur  $]0, 1[$ ,  $f'(x) = \left[ \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times x - \sqrt{1-x^2} \right] \times \frac{1}{x^2}$

$$= \frac{-x^2 - (1-x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

Sur  $]0, 1[$ ,  $f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} < 0$

## EXERCICE 11

$$V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$$

Posons  $U_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) (-1)^n$   
 $U_n > 0$  Pour tout  $n$ , somme de termes positifs.

$$U_n = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{7}) + \dots$$

$$U_n = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{42} - \dots$$

$0 < U_n < 1$   
 $V_n = \frac{U_n}{n}$  donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} V_n = 0$

## EXERCICE 12

(E) :  $x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 8 = 0$   
 On pose  $f(x) = x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 8$   
 $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 32x = 4x(x^2 - 6x + 8) = 4x(x-2)(x-4)$   
 L'équation admet 4 solutions

$\begin{cases} f(-1) = 17 > 0 \\ f(0) = -8 < 0 \end{cases}$  donc  $-1 < x' < 0$

$\begin{cases} f(0) = -8 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{cases}$  donc  $0 < x'' < 1$

$\begin{cases} f(3) = 1 > 0 \\ f(4) = -520 < 0 \end{cases}$  donc  $3 < x''' < 4$

$$\begin{cases} f(4) = -520 < 0 \\ f(5) = \dots > 0 \end{cases} \text{ donc } 4 < x'''' < 5$$

## EXERCICE 13

$$f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

a) Pour tout  $k > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_k(x) = \frac{kx^{k-1}\sqrt{x^2+1} - x^k \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'_k(x) = \frac{x^{k+1}[x^2(k-1) + k]}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Comme  $[x^2(k-1) + k] > 0$  donc  $f'_k(x)$  est de signe de  $x^{k-1}$

Si  $k$  est pair alors  $k-1$  est impair on a alors

Si  $k$  est impair et  $k \neq 1$  donc  $k-1$  est pair et  $(k-1) \neq 0$

$f \nearrow$  et  $f_k \nearrow$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  Si  $k=1$   $f'_1(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$   
 $f$  est aussi croissante

b) Pour tout  $k > 0$ ,  $A(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_k \iff \frac{x_0^k}{\sqrt{x_0^2+1}} = y_0 \iff$

$y_0 \sqrt{x_0^2+1} = x_0^k$ , Pour tout  $k > 0$   
 $x_0^k$  est indépendant de  $k$  ssi  $x_0 = 0$  ou  $x_0 = 1$

Si  $x_0 = 0$  alors  $y_0 = 0$

Si  $x_0 = 1$  alors  $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conclusion : Toutes les courbes  $C_k$  passent par  $A_1(0, 0)$  et  $A_2(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$

## EXERCICE 14

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

a)

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

$\iff (1+x^2)f'(x) = xf(x)$

b) Par récurrence  
 $n=0$  vérifions  $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$   
 comme  $(1+x^2)f'(x) = xf(x)$

$$f''(x)(1+x^2) + 2xf'(x) = f'(x) + xf'(x) \iff$$

$$(1+x^2)f''(x) + (2x-x)f'(x) = 0 \iff$$

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$$

Posons l'hypothèse de récurrence et démontrons que  
 $(1+x^2)f^{n+3}(x) + (2n+3)f^{n+2}(x) + [(n+1)^2 - 1]f^{n+1}(x) = 0$

En effet, Si  $(1+x^2)f^{n+2}(x) + (2n+1)f^{n+1}(x) + [n^2 - 1]f^n(x) = 0$

En dérivant on a

$$\begin{aligned} &: (1+x^2)f^{n+3}(x) + 2xf^{n+2}(x) + (2n+1)xf^{n+2}(x) + (2n+1)f^{n+1}(x) + (n^2-1)f^{n+1}(x) = 0 \\ \implies &(1+x^2)f^{n+3}(x) + (2n+3)f^{n+2}(x) + [(n+1)^2-1]f^{n+1}(x) = 0 \end{aligned}$$

### EXERCICE 15

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(cx^2+1) - 2x(x^2+ax+b)}{(cx^2+1)^2}$$

f admet un extrémum en -2  $\iff f'(-2) = 0$

f admet un extrémum en 0  $\iff f'(0) = 0$

L'extrémum en 0 est égale à 2  $\iff f(0) = 2$

$$\begin{cases} a = 0 \\ -ac + (-2)^2 - 4(1-bc) + a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

### EXERCICE 16

a)  $f_{a,b}(x) = a \sin x + b \sin^3 x$

$$f'_{a,b}(x) = a \cos x + 3b \sin^2 x \cos x$$

$$= a \cos x + 3b(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$f'_{a,b}(x) = a \cos x + 3b \cos x + 3b \cos^3 x$$

$$f'''_{a,b}(x) = -a \sin x - 3b \sin x + 9b \sin x - 9b \sin^3 x$$

$$f'''_{a,b}(x) = (6b - a) \sin x - 9b \sin^3 x$$

b)

$$\begin{cases} a \sin x + b \sin^3 x = f_{a,b}(x) & (1) \\ (6b - a) \sin x - 9b \sin^3 x = f'''_{a,b}(x) & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \implies (9a + 6b - a) \sin x = 9f_{a,b}(x) + f'''_{a,b}(x)$$

$$\implies (8a + 6b) \sin x = 9f_{a,b}(x) + f'''_{a,b}(x)$$

On intègre cette relation

$$9 F_{a,b}(x) = -(8a + 6b) \cos x - f'_{a,b}(x)$$

$$F_{a,b}(x) = -\frac{1}{9} [(8a + 6b) \cos x + a \cos x + 3b \cos x - 3b \cos^3 x]$$

$$= -\frac{1}{9} [(9a + 9b) \cos x - 3b \cos^3 x]$$

$$= -(a + b) \cos x + \frac{b}{3} \cos^3 x + C^{te}$$

### EXERCICE 17

$$f(x) = \frac{x^2 - |x - a|}{x^2 + ax} \text{ où } f \text{ est définie } (a \in \mathbb{R}^*)$$

On a :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2 + ax} & \text{si } x \geq a \\ f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 + ax} & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

☞ Pour  $x > a$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{2x^2 - 2x + 2a - x^2 - ax}{2(x-a)x(x+a)} \\ &= \frac{x(x-a) - 2(x-a)}{2x(x-a)(x+a)} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\ &= \frac{x-2}{2x(x+a)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{a-2}{4a^2} = f'_d(a)$$

☞ Pour  $x > a$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{2x^2 + 2x - 2a - x^2 - ax}{2(x-a)x(x+a)} \\ &= \frac{x^2 - ax + 2x - 2a}{2x(x-a)(x+a)} \\ &= \frac{(x-a)(x+2)}{2x(x-a)(x+a)} \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x+2}{2x(x+a)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{a+2}{4a^2} = f'_g(a)$$

f est dérivable en a ssi  $f'_g(a) = f'_d(a) \iff \frac{a-2}{4a^2} = \frac{a+2}{4a^2}$

$\iff a-2 = a+2 \iff 0 = 4$  (impossible)

Donc aucune valeur de a / f soit dérivable.

### EXERCICE 18

$$f(x) = \sin^{2n} x - \cos^{2n} x$$

$$f'(x) = 2n \cos x \sin^{2n-1} x + 2n \sin x \cos^{2n-1} x$$

$$= 2n \cos x \sin x (\sin^{2n-1} x + \cos^{2n-1} x)$$

$$f'(x) = n \sin 2x (\sin^{2n-1} x + \cos^{2n-1} x)$$

$f'(x) = 0 \iff \sin 2x = 0$  car  $\sin^{2n-1} x + \cos^{2n-1} x > 0$

$$\iff 2x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \iff x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

f s'annule en changeant de signe aux points  $x_k = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

## EXERCICE 19

$$\sqrt{\frac{3x^2 + 7x + 8}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8}} \geq 0$$

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 7x^2 - 14x + 8 & x - 1 \\ -x^3 - x^2 & -x^2 + 6x - 8 \\ \hline 6x^2 - 14x & \\ 6x^2 - 6x & \\ \hline -8x + 8 & \end{array}$$

$$\Delta = 36 - 4 \times 8 = 4$$

$$x_1 = \frac{-6 - 2}{-2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-6 + 2}{-2} = 2$$

$$3x^2 + 7x + 8 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \times 8 \times 3 = 49 - 96 = -47 < 0$$

x	$-\infty$	1	2	6	$+\infty$
		+	-	+	-

Solution :  $] -\infty, 1[ \cup ] 2, 4[$

## EXERCICE 20

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$

a) Soit la Tangente  $T_\lambda^0 : y - f_\lambda(0) = f'_\lambda(0)(x - 0)$ ;  $f_\lambda(0) = \lambda$

2

## EXERCICE 3 : CALCUL DES FONCTIONS DERIVEES

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + \sqrt{x-1} - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}})x - (x^3 - 2x + \sqrt{x-1} - 1)}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 + \frac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} + 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 + \frac{x-2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} + 1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^3 + \frac{2-x}{2\sqrt{x-1}} + 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'_\lambda(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x + \lambda)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x\lambda - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'_\lambda(0) = 1$$

$$T_\lambda^0 : y - \lambda \text{ ie } T_\lambda^0 : y = x + \lambda$$

$T_\lambda^0$  est parallèle à  $\Delta : y=x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

b)  $T_\lambda^1$  tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1

$$T_\lambda^1 : y - f_\lambda(1) = f'_\lambda(1)(x - 1)$$

$$: y - \frac{1 + \lambda}{2} = -\frac{2\lambda}{4}(x - 1)$$

$$: y = -\frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

$$: y = -\frac{\lambda}{2}(x + 2)$$

$$: y - \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2}(x + 2)$$

donc  $A(-2, \frac{1}{2}) \in T_\lambda^1$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$

---

$$U(x) = \frac{(2x+1)^2(x+1)^2}{x^2+x-2}$$

$$\begin{aligned}U'(x) &= \frac{2[2(x+1)+2x+1](2x+1)(x+1)(x^2+x+2)}{(x^2+x+2)^2} - \frac{(2x+1)(2x+1)^2(x+1)^2}{(x^2+x+2)^2} \\&= \frac{(2x+1)(x+1)[(4x+4+4x+2)(x^2+x+2) - (2x+1)^2(x+1)]}{(x^2+x+2)^2} \\&= \frac{(2x+1)(x+1)[(8x+6)(x^2+x+2) - (4x^2+4x+1)(x+1)]}{(x^2+x+2)^2} \\&= \frac{(2x+1)(x+1)[8x^3+14x^2-10x-12]}{(x^2+x+2)^2} - \frac{(2x+1)(x+1)[4x^3+8x^2+5x+1]}{(x^2+x+2)^2} \\U'(x) &= \frac{(2x+1)(x+1)(4x^3+6x^2-15x-11)}{(x^2+x+2)^2}\end{aligned}$$

$$g(x) = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2$$

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2\left(\frac{x-2}{x-1}\right) \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2} \\&= 2\left(\frac{x-2}{x-1}\right) \frac{1}{(x-1)^2} \\g'(x) &= \frac{x-2}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-x-1}}$$

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{-x-1-x+1}{(-x-1)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{-x-1}}} \\h'(x) &= \frac{-2x}{(-x-1)^2} \sqrt{\frac{-x-1}{x-1}}\end{aligned}$$