ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE (ENEA)
DAKAR–SÉNÉGAL

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2006

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS A**

**Deuxième Composition de Mathématiques**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Machines à calculer non autorisées**



**Exercice 1** Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $n \in \mathbb{N}^\star$.

**a.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x)^2$.

- **a.1** Développer $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x)^2$, puis déterminer le discriminant du polynôme du second degré $f(x)$. Que peut-on dire du signe de ce discriminant?
- **a.2** Déduire de la question précédente l'inégalité de Cauchy Schwartz:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

**b.** Développer $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$, puis déduire de la question **a.** l'inégalité de Minkowski

$$(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2)^{1/2} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2}$$

**Exercice 2** On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on considère les deux nombres complexes $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer la somme $(\alpha + \beta)$ puis le produit $(\alpha\, \beta)$.

2. Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ en fonction des valeurs de $\alpha$ ou $\beta$ trouvées à la question 2.

4. En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$ en fonction des valeurs de $\alpha$ ou $\beta$ trouvées à la question 2.



**Exercice 3** On effectue des essais indépendants de probabilité de succès constant égale à $p$ $(0 < p < 1)$. On note $X$ le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès. Calculer les probabilités des événements $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = k\}$ pour un $k$ entier quelconque strictement positif. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour $X$.
On note $Y$ le nombre d'essais nécessaires pour obtenir $m$ succès, avec $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ et $m$ est fixé à l'avance. Donner la loi de $Y$. (On calculera $\mathrm{P}(Y = m + k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.)

**Problème** On admettra le résultat suivant noté **R.A.**

**R.A.** : Soit $\phi$ une fonction continue sur $[a, b]$, $(a < b$, et $a$ et $b$ réels$)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi(x)\sin(nx)dx = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi(x)\cos(nx)dx = 0$.

**I. Préliminaires**

**I.1.** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

**I.2.** En déduire la limite de $\dfrac{\sin(nx)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et lorsque $x$ tend vers 0.

**I.3.** Soit $g$ la fonction à valeurs réelles définie par

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Quel est le domaine de définition de $g$? Déterminer la limite de la fonction $g$ quand $x$ tend vers 0.

On se restreint à l'intervalle $[0, \pi]$ et on définit la fonction $f$ par

$$f : [0, \pi] \to \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in ]0, \pi] \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $f$ est-elle continue sur $[0, \pi]$.

**I.4.** Montrer qu'on peut définir la fonction $f$ par

$$f : [0, \pi] \to \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(nx) + \frac{1}{2}\frac{\sin(nx)\ \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in ]0, \pi] \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**I.5.** On considère une nouvelle fonction $\psi_{a,b}$ définie sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles; cette fonction est définie pour $a$ et $b$ réels par

$$\psi_{a,b}(x) = \begin{cases} (ax + bx^2)\, \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}, & \forall x \in ]0, \pi] \\ a & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\psi_{a,b}$ est continue sur $[0, \pi]$.

**II.**

**II.1.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que

$$\int_0^\pi h_{a,b}(x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi h_{a,b}(x) \cos(3x) dx = \frac{1}{3^2},$$

où $h_{a,b}(x) = (ax + bx^2)$.

**II.2.** En déduire que les réels $a$ et $b$ de la question **II.1.** sont ceux qui satisfont l'équation



$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; \int_0^\pi h_{a,b}(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{k^2}.$$

**III.**

**III.1** Calculer la somme partielle $\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k$ pour $x \in [0, \pi]$.

**III.2** En remarquant que $\sum_{i=1}^{n} \cos(kx)$ est la partie réelle de $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k$, en déduire que $\sum_{i=1}^{n} \cos(kx) = f(x) \; \forall x \in [0, \pi]$ .

**IV.** On veut démontrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{6}$, où $u_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

**IV.1.** En prenant pour $a$ et $b$ les réels trouvés à la question **II.1.**, montrer à partir des questions **II.2.** et **III.2** que

$$u_n = \int_0^\pi (ax + bx^2) f(x) dx$$

**IV.2.** Déduire de **I.4**, **I.5** et **IV.1** que

$$u_n = \int_0^\pi -\frac{1}{2}(ax + bx^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi (ax + bx^2) \cos(nx) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \psi_{a,b}(x) \sin(nx) dx.$$

**IV.3.** Utiliser le résultat admis **R.A** pour en conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}.$$