INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de f .

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$f(x) = x^3\,Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. Etudier la convexité de f.

3. Tracer le graphe de f.

4. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, en justifiant votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple:

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est positive ou nulle.

2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ est décroissante.

3. Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est la primitive d'une fonction continue.

Exercice n° 4

Soit $M(x,y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

On pose $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On tire aléatoirement des valeurs de x et de y entre 0 et 1. Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

Exercice n° 5

Soit f l'application numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$

1. Etudier les variations de f.

2. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Etudier la convergence de cette suite (u_n) .

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

4. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x (f(t) - t)\ dt$

5. Trouver une fonction g continue telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x (g(t) - t)\ dt$ soit finie.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $I_n = \int_1^e (Ln\, t)^n \, dt$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0 et I_1
2. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}
3. Pour tout $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}
4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

Exercice n° 7

Soit $f :]-1,1[\rightarrow R$ définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\, Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Donner un développement limité de *f*, d'ordre 3, au voisinage de 0.

2. Montrer que *f* admet une tangente *T* au point d'abscisse 0, donner son équation et la position du graphe de *f* par rapport à *T*.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$