

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1



1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x \cos^2 x}{1+x^2}$
2. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$
3. Trouver une primitive de $\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$
4. Résoudre le système : $\begin{cases} x-y=2 \ln 2 \\ x+y=4 \ln 2 \end{cases}$
5. Soit la fonction f définie sur $] -2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+2}$. Déterminer, si elle existe, la valeur du minimum de f sur cet intervalle.
6. Résoudre l'inéquation $\frac{x^2 - 2}{x-1} \leq 0$
7. Donner l'équation de la droite dans le plan, parallèle au vecteur $u(1,2)$, et qui passe par le point $A(1,-1)$

8. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x - e^{-x/2})$

9. Dans une classe de lycée, la moyenne des filles à l'épreuve de mathématiques est de 12/20 et celle des garçons de 10,2/20. Sachant que la classe est composée pour les 2/3 de filles, quelle est la moyenne de la classe ?

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+1)}$



Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue de x .

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.
2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$ et $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Etudier la convergence de cette suite (u_n) et calculer sa limite si elle existe.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$



1. Etudier les variations de f .
2. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à un point que l'on précisera.
3. Trouver une primitive de f sur $]0,1[$.
4. Calculer l'aire comprise entre l'axe ox , le graphe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{2}{3}$.
5. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,1[$ par :

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

Trouver la primitive G de g qui vérifie $G(\frac{1}{2}) = 6$

Exercice n° 5

On considère la suite de fonctions numériques (f_n) définies sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = x^n \sin x$, où n est un entier naturel.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, \pi/2]$ et donner l'allure de son graphe.
2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout n .
3. Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie par : $u_{n+1}(x) = u_n(x) + f_n(x)$ et $u_0(x) = f_0(x)$. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice n° 6

L'exercice consiste à prouver l'irrationalité de π et π^2 selon la méthode de Niven (Bulletin Amer. Math. Soc. 53, 509, 1947).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction :

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k, \text{ où } c_k \in \mathbb{Z}^*$$

1. Montrer que $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$ et que $f(1-x) = f(x)$ pour tout x .

2. Calculer la dérivée m -ième $f^{(m)}(0)$ de f en 0 en fonction de m, n et c_m pour tout $m \in \mathbb{N}$. En déduire que les nombres $f^{(m)}(0)$ et $f^{(m)}(1)$ sont des entiers relatifs quels que soient les entiers m (On peut dériver m fois l'égalité $f(1-x) = f(x)$).

3. On suppose que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Soit

$$G(x) = b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x)$$

a) Montrer que $G(0)$ et $G(1)$ sont des entiers relatifs.

b) Montrer que $\frac{d}{dx}(G'(x) \sin \pi x - \pi G(x) \cos \pi x) = \pi^2 a^n \sin \pi x \times f(x)$

c) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \pi \int_0^1 a^n \sin \pi x \times f(x) dx$ en fonction de $G(0)$ et $G(1)$, et en particulier que I est un entier relatif.

d) Conclure à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Exercice n° 7



Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie. On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a utilisé le vaccin A. Un cinquième le vaccin B.
- Lors d'une épidémie, 8 malades sur 1000 avaient utilisé le vaccin A et 6 le vaccin B.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note :

M = « l'individu est malade » et V = « l'individu est vacciné »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un vaccin le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\bar{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{\text{Probabilité qu'un individu non vacciné soit malade}}{\text{Probabilité qu'un individu vacciné soit malade}}$$

Calculer λ pour chacun des deux vaccins. Que peut on en conclure ?