INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x^2 \, Ln(x + e^x)$

2. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} (x+1)\sin x \, dx$

3. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

4. Trouver la primitive de $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ qui s'annule en x=1.

5. Résoudre l'inéquation : $6x^2 - x - 1 < 0$

6. On considère 5 entreprises dont les dépenses mensuelles en eau au cours des deux derniers mois sont présentées dans le tableau suivant :

3	4
1	1
2	5
1	3
2	1

Calculer le barycentre de ces données.

7. Dans le secteur du commerce de gros, la moyenne du chiffre d'affaires des petites entreprises est de 100, la moyenne du chiffre d'affaires des moyennes entreprises est de 300 et celle des grandes de 800. Sachant que les petites entreprises représentent la moitié du total des entreprises et que les grandes entreprises ne représentent que 10% du total, quelle est la moyenne du chiffre d'affaires pour l'ensemble des entreprises ?

8. Calculer $\underset{x\to+\infty}{Lim}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

9. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^n = 1$ pour $n = 3$ et 4.

10. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4}$ et $U_1 = 1$

Exercice n° 2

Pour tout nombre réel t, on considère la fonction numérique F_t définie par :

$$F_t(x) = \frac{e^{(1+t)x}-1}{e^x-1}$$

1. Montrer que F_t se prolonge par continuité en 0, et que le fonction prolongée, notée encore F_t, est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t'(0)$?

2. On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p, et l'on pose

$$F_t(x) = 1+\varphi_0(t)+\frac{\varphi_1(t)}{1!}x+\frac{\varphi_2(t)}{2!}x^2+....+\frac{\varphi_p(t)}{p!}x^p+x^p\,\varepsilon(t)$$

Donner les valeurs de φ_0 et φ_1.

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + Ln(x), \text{ pour } x>0$$

où Ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

1. Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de racines de l'équation $f_a(x) = 0$.

2. Donner l'allure du graphe de $f_{1/2}$.

3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{1/2}$, l'axe des abscisses, les droites x=1 et x=2.

4. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, et tout $x,t > 0$, on a : $f_a(\alpha x + (1-\alpha)t) \geq \alpha f_a(x) + (1-\alpha) f_a(t)$

5. Etudier, selon les valeurs de a, la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n - 1}{t+1} dt$

1. Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$

2. Calculer $I_3(x)$

3. Etudier les variations de $I_1(x)$ et tracer son graphe.

4. Calculer $J_1 = \int_0^1 I_1(x)\, dx$

Exercice n° 5

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

On pose $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On tire aléatoirement un point M (x, y). Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

Exercice n° 6

On définit, pour tout entier $n \in N$, l'intégrale :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$$

1. Calculer $I(0), I(1), I(2)$
2. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n)$ et $I(n-2)$
3. Etudier la monotonie de la suite $I(n)$

4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I(n+1)}{I(n)}$
5. Soit $u(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $u(0), u(1)$.
6. Démontrer que, pour tout n, $u(n)$ est égale à une constante que l'on précisera.
7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} nI^2(n)$
8. A l'aide de la relation établie à la question 2, exprimer $I(2p)$ et $I(2p+1)$ en fonction C_{2p}^{p} et de p (C_{2p}^{p} désigne l'ensemble des combinaisons de p éléments pris parmi $2p$).