

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2026
FILIERE INDUSTRIELLE : GENIE CIVIL OPTION BATIMENT

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

Durée : 3 H

Coefficient : 3

*Cette épreuve comporte trois (3) pages numérotées de 1/3 à 3/3.
Calculatrice scientifique autorisée.*

EXERCICE 1

I. On considère l'équation différentielle (E) définie sur $] -1 ; +\infty[$ par

$$(E): \frac{d^2}{dx^2}(y) - \frac{d}{dx}(y) - 2y = -2 + 2\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \quad \text{où } y \text{ est une fonction inconnue.}$$

1. On admet que la fonction $h: x \mapsto \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$ est une solution de (E)

a. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E)

b. Soit g la solution générale de (E) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$

Prouver que $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - \ln(x+1), \forall x \in]-1 ; +\infty[$ (on pourra

remarquer que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)

2. a. Déterminer la fonction g' , dérivée de g sur $] -1 ; +\infty[$

b. Dresser le tableau de variation de g

c. Calculer $g(0)$ et en déduire que, $\forall x > -1, g(x) \leq 0$

II. Soit f_n la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} - n(e^{x-1} - 1), \forall n \in \mathbb{N}$ et (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère $(O; I; J)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x)$ et conclure (f_0 désigne f_n pour $n = 0$)

2. Soit $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

a. Montrer que $a_n = 1 + n \left(1 - \frac{1}{e}\right)$,

b. Justifier que $a_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

3. On admet que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on note f'_n sa dérivée

a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, f'_n(x) = \frac{g(x)}{x^2} - ne^{x-1}$

b. En remarquant que $g(x) < 0, \forall x > 0$, déterminer le signe de $f'_n(x)$

c. Dresser le tableau de variation de f_n puis celui de f_0

d. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

e. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < b_n < 2$

4. Préciser les positions relatives des courbes (C_n) et $(C_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$

5. On admet que le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de f est :

$$f_n(x) = 1 + \left(1 - \frac{1}{e}\right)n - \left(\frac{2n+e}{2e}\right)x + \left(\frac{2e-3n}{6e}\right)x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

a. En déduire l'équation de la Tangente (T) à (C_n) au voisinage de 0

b. Préciser la position relative de (C_n) et (T) au voisinage de 0.

6. Construire dans le même repère les courbes (C_0) et (C_1), puis tracer la tangente (T). On prendra

$$a_1 = 1,5$$

EXERCICE 2

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct ($O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$) les points A, B et C de coordonnées respectives $(2; -1; 1)$, $(1; 2; -1)$ et $(-1; 1; 0)$

1. a. Démontrer que les points A, B et C forment un plan

b. Prouver qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 5y + 7z - 4 = 0$

2. Soit Q le plan médiateur du segment $[AC]$

a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan Q est : $3x - 2y + z - 2 = 0$

b. Démontrer que les plans (ABC) et Q sont sécants suivant une droite dont on précisera un vecteur directeur.

3. On note D le barycentre des points pondérés ($A; 1$) ($B; -1$) et ($C; 1$)

a. Justifier que $\vec{OD} = -2(\vec{j} - \vec{k})$

b. Vérifier que $\overline{AB}^2 = 14$ et que $\|\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}\|^2 = 104$

4. Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$75(MA^2 - MB^2 + MC^2) = 10 - 4AB^2 - \|\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}\|^2$$

a. Démontrer que (Γ) est la sphère de centre D et de rayon 2

b. Prouver que le plan Q sectionne (Γ) suivant le cercle (C) dont on précisera le rayon.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct ($O; \vec{i}; \vec{j}$) d'unité graphique 2 cm. (C_α) est une famille de coniques définies par $(C_\alpha) = \left\{M(z) \in \mathbb{C} / -1 + z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = \frac{\alpha}{2}(z^2 + \bar{z}^2)\right\}$

où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\bar{z}$ est le conjugué de z .

($\mathcal{H}$) est une Hyperbole de foyer $F\left(\frac{\sqrt{6}}{4}; -\frac{1}{2}\right)$, passant par le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation :

$$12x = \sqrt{6}$$

1. a. Justifier que l'excentricité de ($\mathcal{H}$) est égale à $\sqrt{3}$

b. Soit Ω d'affixe $-\frac{1}{2}i$, le centre de l'Hyperbole ($\mathcal{H}$)

Calculer la distance focale de ($\mathcal{H}$)

2. a. Prouver qu'une équation réduite de $(\mathcal{H})$ est de la forme : $2x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
 b. En déduire les coordonnées des sommets de $(\mathcal{H})$
 c. Déterminer les équations des asymptotes de $(\mathcal{H})$

3. a. Démontrer qu'une équation cartésienne de la famille (C_α) est :

$$(\alpha - 1)x^2 - (\alpha + 1)\left(y - \frac{1}{\alpha+1}\right)^2 = \frac{-2-\alpha}{\alpha+1}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

- b. Prouver que l'excentricité de (C_α) est égale à $\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$, $\forall \alpha < -2$
 c. Expliquer pourquoi la famille (C_α) ne peut être équilatère.
 4. a. Démontrer que la famille des coniques (C_α) est réduite à l'Hyperbole $(\mathcal{H})$ de la question 2 a) si et seulement si $\alpha = -3$
 b. Construire l'Hyperbole $(\mathcal{H})$ ainsi que ses asymptotes et directrices dans le même repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

••

.....