

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (c'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels x pour lesquels les égalités suivantes sont vraies) :

1) $2 \ln x = \ln 3 + \ln(2x + 3)$ 2) $2(\ln x)^2 + 3 \ln x - 2 = 0$

3) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ 4) $2e^{x^2-2x-1} = 2$ 5) $2 \log^2 x - 3 \log x - 2 = 0$ 6) $e^x = 2 + \frac{15}{e^x}$

7) soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

1° a) Déterminer les trois nombres réels a , b et c tels que pour tout réel x ,

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 0$

2° Déduire du 1° la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 + \ln x + 2 = 0$

b) $2e^{2x} - 5e^x + 1 = -2e^{-x}$

8) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$4(\log x)^4 - 37(\log x)^2 + 9 = 0$$

9) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

1° a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $-x^2 + 3x - 2 > 0$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{3}e^{2x} - e^x + \frac{2}{3} < 0$$

2° a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{15}{16} \leq 0$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation suivante :

$$-\ln^2 x + 4 \ln x - \frac{15}{4} \geq 0$$

3° Déduire de tout ce qui précède (1°, 2°) la résolution dans $\mathbb{R}$ du système d'inéquation suivante :

$$\begin{cases} e^{2x} - 3e^x + 2 < 0 \\ \ln^2 x - 4 \ln x + \frac{15}{4} \leq 0 \end{cases}$$

Résoudre les systèmes de 2 équations à 2 inconnues suivants :

1) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x + y = 1 + e \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log x + \log 4 = \log 3 - \log y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 9 \\ \log x + \log y = \log 14 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} e^x \times e^y = e^3 \\ \log x + \log y = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 3 \\ \log x^2 - \log y^2 = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 8 \\ \log x + \log y = 2 \log 2 + \log 3 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 6 \\ \ln(x+y) - \ln 5 = 0 \end{cases}$

Problème 1

Une entreprise produisant un bien A constate que son coût marginal CMa est lié à la quantité produite Q du bien A par la relation : $CMa = 3Q^2 - 42Q + 200$. La quantité Q étant exprimée en tonnes et le CMa en francs par tonnes du produit A

1° le coût marginal étant la fonction dérivée du coût total (C) par rapport à Q , donner l'expression de la fonction coût total C , sachant que les charges autres que les coûts de production sont égales à 500F

2° En déduire l'expression du coût unitaire moyen de fabrication CMo

3° On suppose que le prix du marché est indépendant de la quantité Q produite par l'entreprise et est égal à 200F par tonne de bien A . donner l'expression du profit B de l'entreprise en fonction de Q .

4° représenter la fonction $B = B(Q)$. Déterminer la quantité Q^* qui rend le profit maximal et calculer ce profit $B^* = B(Q^*)$

Problème 2

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

1° Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C)

2° Calculer l'intégrale définie : $\int_a^b f(x) dx$ (avec $-1 < a < b$)

3° Calculer l'aire $A(X)$ délimitée par la courbe (C), l'axe Ox et les droites d'équation $x=2$ et $x=X$ (avec $X > 2$)

4° Quelle est la limite de $A(X)$ lorsque X tend vers plus l'infini ?

Problème 3

On considère la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} - 3$$

1° i) Déterminer l'ensemble de définition de f

ii) Calculer les limites de f quand x tend vers chacune des bornes de l'intervalle de définition

2° i) Calculer $f'(x)$. Puis $f'(-1)$ et $f'(2)$, f' est une fonction dérivée de f

ii) En déduire les variations de f

3° i) Montrer qu'il existe des constantes a , b et c telles que :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2}$$

ii) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x + a$ est une asymptote à la courbe (C) de f .

4° Tracer avec soin la courbe (C) de f et la droite Δ dans un repère orthonormé.

5° Donner toutes les primitives de la fonction f .

Problème 4

On munit un plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 1 cm. Soit f la fonction numérique de variable

réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$

On note C la courbe représentative de f

1° Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df

2° a) Sur Df , calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f

b) Déduire les variations de f .

3° a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

b) Déterminer les asymptotes à C

4° Vérifier que le point $I\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est le centre de symétrie de C

5° Tracer la courbe C

6° Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe C et les droites d'équations $x = 2$, $x = 5$ et $y = x - 2$

Problème 5

Soit f la fonction numérique : $f(x) = x \log x$

1° Préciser les ensembles de définition et de continuité de f

2° Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers chacune des bornes de l'intervalle de définition

3° Etudier la variation de f , tracer sa courbe représentative (C) et examiner l'existence d'une asymptote oblique.

4° Déterminer l'aire algébrique A du domaine compris entre le segment OA et la courbe (C) , O étant l'origine des axes et A le point $(1,0)$

5° Déterminer l'aire algébrique $A(k)$ du domaine compris entre l'axe Ox , la courbe (C) et la droite $x = k$, k étant un paramètre réel supérieur à 1. Calculer la valeur de k qui annule $A(k)$.

Problème 6

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans le repère orthonormal du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 1 cm.

1° Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. On pourra écrire que pour tout x réel,

$f(x) = \frac{1}{e^x} (xe^x - e^x + 1)$, déterminer également $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

2° Etudier les variations de f

3° Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

4° Construire la droite D d'équation $y = x - 1$ et la courbe C

Problème 7

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1+x}{x}$$

(C) est la courbe représentative de f

1) a) Etudier les variations de f . (on dressera le tableau de variations)

b) Représenter (C) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité sur les axes = 1 cm)

c) Calculer l'aire du domaine plan défini par : $1 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq f(x)$.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

En vous servant uniquement du graphique (C) de f :

a) Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g .

b) Calculer les limites aux bornes de ce domaine.

c) En déduire les asymptotes à la courbe (C') de g

3) Calculer $g'(x)$, où g' est la fonction dérivée de g

Problème 8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + 2 \ln \frac{x}{x-1}$

On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité 1cm

1° Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.

2° Etudier le sens de variation de f

3° Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à C . Préciser la position de C par rapport à Δ .

4° Tracer avec soin Δ et C

Problème 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 + e^{-x}$

Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative

Problème 10

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x^2}$

1° Préciser l'ensemble de définition et de continuité de f

2° Etudier les branches infinies de f

3° Etudier le sens de variation de f et sa concavité.

4° Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f , entre les points A et B de graphe (C) d'abscisses $a = 1$ et $b = 2$ (c'est-à-dire déterminer le point C de l'arc AB du graphe, où la tangente au graphe est parallèle à la corde AB)

4° Tracer le graphe (C) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

5° On appelle $D(m)$ le domaine compris entre le graphe (C) , les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 1$ et $x = m$ où m est un paramètre réel strictement positif, Calculer, en fonction de m , l'aire $A(m)$ de ce domaine

6° Quel est le comportement de $A(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$? Interpréter graphiquement le résultat.

Problème 11

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f : x \rightarrow \frac{(\log x)^2}{x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f ; étudier ses branches infinies.

2) Etudier le sens de variation de f . calculer $f'(x)$ et situer les points d'inflexion de f . Tracer le graphe (C) de f , dans un repère orthonormé.

3) Calculer : $I(m) = \int_1^m \frac{(\log x)^2}{x} dx$, où $m > 1$.

Interpréter géométriquement $I(m)$. Etudier le comportement de $I(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$

4) soit g la fonction définie par : $g : x \rightarrow \frac{(\log|x|)^2}{x}$. Dédurre de l'étude de f les variations et le graphe de g

Problème 12

Soit f la fonction numérique définie par : $f : x \rightarrow x e^{-\frac{x^2}{2}}$

- 1) Etudier la fonction f (préciser notamment sa concavité, son comportement lorsque $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$) et tracer sa courbe représentative.
- 2) Calculer, en effectuant un changement de variables, l'intégrale indéfinie :

$$\int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- 3) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

et interpréter géométriquement la convergence de I .

Les Suites

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et par la relation :

Pour tout nombre entier naturel n ,

$$U_{n+1} = -\frac{1}{3}(2U_n + 5)$$

1° Soit (V_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par $V_n = U_n + 1$

- a) Vérifier que pour tout nombre entier naturel n , $V_{n+1} = -\frac{2}{3}(U_n + 1)$
- b) Déduire du a) que, pour tout nombre entier naturel n , $V_{n+1} = -\frac{2}{3}V_n$
- c) Déduire de ce qui précède que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

2° Déterminer l'expression de V_n , puis celle de U_n en fonction de n

3° Déterminer la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$ et la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

4° Exprimer en fonction de n , la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2

- 1) Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$, les n premiers termes d'une progression arithmétique de raison r . on pose $u_1 = \alpha$. Rappeler l'expression du $n^{\text{ème}}$ terme u_n de cette progression, en fonction de α , r et n .
- 2) On désire étudier la suite des nombres définis par : $v_i = e^{u_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Montrer que les nombres v_i forment une progression géométrique, dont on précisera le 1^{er} terme v_1 et la raison q , en fonction de α et r .
- 3) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de α , r et n .
Pour quelles valeurs de r , la somme S_n admet-elle une limite, lorsque n tend vers $+\infty$?
- 4) On pose $\alpha = 0$ et $r = -1$. Calculer le $n^{\text{ème}}$ terme v_n et la somme S_n , en fonction de n , ainsi que la limite de S_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = 5$, $U_1 = \frac{13}{6}$ et $U_{n+2} = \frac{5}{6}U_{n+1} - \frac{1}{6}U_n$

(1)

1° Calculer les termes U_2 , U_3 , U_4 et U_5 de cette suite.

2° Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ de raison r , avec $r \neq 0$.

a) Donner pour tout nombre entier naturel n l'expression de V_n en fonction de r et de n .

b) Montrer qu'il existe deux valeurs de r telles que la suite (V_n) correspondante vérifie la

relation (1). C'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n , $V_{n+2} = \frac{5}{6}V_{n+1} - \frac{1}{6}V_n$

On notera r_1 et r_2 les raisons respectives de ces suites avec $r_1 < r_2$

3° a) En utilisant les valeurs de r_1 et r_2 obtenus en 2°, vérifier que, quels que soient les nombres réels α et β la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ satisfait la relation (1).

b) Déterminer les nombres réels α et β pour que la suite (V_n) vérifie les conditions initiales $V_0 = 5$ et $V_1 = 13/6$.

c) On admet qu'il existe une seule suite vérifiant (1) et satisfaisant les conditions initiales données ; donc $V_n = U_n$ pour tout entier naturel n .

Vérifier, à l'aide de l'expression de U_n en fonction de n , que l'on retrouve bien les valeurs de U_2 , U_3 , U_4 et U_5 calculées en 1°.

Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

Algèbre linéaire et Analyse

Exercice 1

On considère les matrices à quatre lignes et quatre colonnes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer « manuellement » les matrices produit $A \times B$ et $B \times A$. Que constatez-vous ?

Exercice 2

Calculer les déterminants suivant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 3

1) On pose $f(x) = \frac{6}{x} + 6 \frac{\log x}{x}$

a) Calculer $\int \frac{1}{x} \log x \, dx$

b) En déduire l'expression de $F(x) = \int f(x) \, dx$

c) Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $F(x) = 0$

d) Etudier les variations de f et tracer son graphe (unité sur les axes : 1cm)

e) Calculer l'aire de la partie du plan définie par : $0 \leq y \leq f(x)$, $x=1$, $x=e$

2) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice A est régulière

b) Utiliser la méthode de pivot de Gauss pour trouver l'inverse A^{-1} de A

c) Trouver le vecteur $X(x, y, z)$ tel que : $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4

1) Utiliser la méthode de pivot de Gauss pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = 4 \end{cases}$$

2) On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- Montrer que A est une matrice régulière
- Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour trouver l'inverse A^{-1} de A
- Calculer $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. P est le polynôme caractéristique de A
- Calculer les valeurs propres de A
- On admet que $P(A) = 0$. En déduire A^{-1} et comparer au résultat obtenu en b)

Exercice 5

Déterminer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et en déduire l'équation de récurrence matricielle vérifiée par A^n , $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire A^n . La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 (Analyse)

A) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \ln 2 + 2^{-x}$

- Etudier les variations de f . On rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x 2^x = 0$ quand x tend vers $-\infty$
- On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)
 - Démontrer que C_f admet une asymptote « oblique » puis tracer C_f et son asymptote
- Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln 2 - \frac{1}{2^x \ln 2}$. Calculer la dérivée de F ;
 - Que constatez vous ?

B) Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C)
- Donner une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$

Exercice 7

Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X , y pièces de type Y et z pièces de type Z .

La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés dans le tableau suivant :

	X	Y	Z
Masse en grammes	2,5	2	1
Coût en francs	1	1,5	0,5

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N des pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en francs.

Proposés par NGNIE

1° Exprimer N , M et C en fonction de x , y et z .

2° On définit ainsi une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui à (x, y, z) associe (N, M, C) .

a) Déterminer la matrice F de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \text{et} \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

b) Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système d'inconnues x, y, z écrit matriciellement :

$$F \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer alors la matrice F' telle que l'on ait :

$$F' \times \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3° L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées au total 140 pièces, d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135F.

Dans ces conditions, calculer les nombres de pièces de chacun des types X, Y et Z , qui seront utilisées pour cette fabrication.

Exercice 8

$$\text{On note : } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1° Calculer la matrice M^2

2° a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $M^2 = aM + bI$

b) En utilisant la relation précédente ; montrer qu'il existe une matrice M' telle que :

$$M \times M' = M' \times M = I$$

d) Ecrire M' sous forme d'un tableau de nombres.

Exercice 9

$$\text{On donne les matrices : } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les deux nombres réels α et β tels que $A = \alpha I + \beta J$

2° Calculer J^2 ; vérifier que : $(3I + J)^2 = 10I + 6J$

Exercice 10

1) Soient les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2 . En déduire qu'il existe une matrice M' telle que $M' \times M = I$

1) On se propose de résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S) \begin{cases} xy^2z^2 = 1 \\ x^4y^3z^4 = e \\ \frac{1}{x^4y^4z^5} = e^2 \end{cases}$$

a) On pose : $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$.

Montrer que le système (S) s'écrit sous la forme matricielle :

$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre le système (S) en utilisant la question 1)

Exercice 11

M étant une matrice carrée, on pose $M^1 = M$ et, pour tout entier naturel non nul, $M^{n+1} = M \times M^n$

1) On considère la matrice D définie par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculer D^2 et D^3 . On admettra que pour tout entier naturel non nul : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

b) Etant donné les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, Montrer que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $P' \times P$.

c) On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \times D \times P' = A$

d) n est un entier naturel non nul.

Sachant que $A^n = (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \dots \times (P \times D \times P')$ (produits de n facteurs $(P \times D \times P')$), utiliser le 1)b) pour montrer que $A^n = P \times D^n \times P'$.

En déduire les termes de la matrices A^n en fonction de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

1) On considère la suite u définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

Pour tout entier naturel n , on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que pour tout n entier naturel $X_{n+1} = AX_n$

b) Calculer X_1 en fonction de X_0 puis X_2 en fonction de X_0

c) En admettant que, pour tout entier naturel n non nul, $X_n = A^n X_0$, calculer u_n en fonction de

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

- d) Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 12

Une entreprise assure la production de trois objets A_1 , A_2 et A_3 en quantités hebdomadaires respectives x_1 , x_2 , x_3

Un « programme de production » (hebdomadaires) s'exprime par un vecteur $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ (par exemple, le programme de production (20, 10, 30) correspond, pour la semaine concernée, à une production de 20 objets A_1 , 10 objets A_2 et 30 objets A_3).

(Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes)

1) Calcul vectoriel

Pour réaliser un programme de production $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, on utilise y_1 kilogrammes de matière première, y_2 heures de travail et y_3 kilowattheures d'énergie, ce que l'on représente par le vecteur $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

On sait que l'application h , de $\mathbb{R}^3$, qui à $\vec{X}$ associe $\vec{Y}$, est linéaire. Sa matrice associée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \left(\text{Ainsi : } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

- a) Calculer le vecteur $\vec{Y}$ associé au vecteur $\vec{X} = (20, 10, 30)$.
b) Déterminer le vecteur $\vec{X}$ qui a pour vecteur associé le vecteur $\vec{Y} = (230, 130, 100)$.

2) Calcul de probabilités

Une étude a permis de constater, compte tenu des contraintes extérieures que, quel que soit le programme de production hebdomadaire choisi, la probabilité de le réaliser effectivement est égale à 0,7 (On suppose que les réalisations des programmes hebdomadaires de production sont indépendantes les unes des autres).

On note V la variable aléatoire qui correspond au nombre de programmes hebdomadaires de production réalisés, sur une période de 50 semaines de production.

- a) Préciser, en justifiant, la loi de probabilité suivie par V et donner ses paramètres.
b) Calculer la probabilité de l'événement « $V = 35$ » (On donnera l'approximation décimale arrondie à 10^{-2} près de cette probabilité)
c) On remplace la loi de V par une loi normale. Quels sont les paramètres de celle-ci (arrondie à 10^{-2} près) ?
d) On note V' une variable aléatoire qui suit cette loi normale. En calculant successivement les probabilités de chacun des deux événements « $V' \leq 40,5$ » et « $29,5 \leq V' \leq 40,5$ ». Donner les approximations décimales des probabilités de chacun des deux événements « $V \leq 40$ » et « $30 \leq V \leq 40$ »

Exercice 13

On considère la matrice carrée d'ordre 3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que M est inversible.
2) Calculer les matrices M^2 et M^3

- 3) Montrer, en calculant $M^3 - 3M^2 + 3M$, que les matrices I , M , M^2 et M^3 , forment un système lié, dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3. Donner la relation linéaire qui existe entre ces quatre matrices.
- 4) Montrer que la relation précédente permet d'exprimer M^{-1} en fonction de I , M et M^2
- 5) En déduire la matrice M^{-1}
- 6) On se propose de résoudre le système d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} x & & & = 1 \\ & y & - & 2z = 2 \\ 2x & & + & z = 1 \end{cases}$$

Ecrire ce système sous forme matricielle $NX = B$, où X désigne le vecteur- colonne des

inconnues : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et N et B deux matrices que l'on écrira explicitement.

- 7) Utiliser le résultat de la question 5) pour trouver la solution unique de ce système d'équations.

Exercice 14

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ où a est paramètre réel,

- 2) Pour quelles valeurs du paramètre a , l'inverse M^{-1} existe-t-elle ?
- 3) Déterminer la matrice M^{-1} et en déduire la solution du système suivant :

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ -5x + 2y = -8 \end{cases}$$

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ -9 & -8 & -9 \\ -9 & -9 & -8 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

- 1) Calculer les valeurs propres de f . Peut-on dire a priori si f est diagonalisable ?
- 2) Déterminer les vecteurs propres de f
- 3) Montrer que f est diagonalisable. Calculer la matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres et en déduire la matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ associée à f dans cette base.

Exercice 16

Soit f l'application linéaire de l'ensemble $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui au vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ fait

correspondre le vecteur $Y = f(X) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$
- 2) Ecrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.

3) Calculer les images par f des vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 17

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

- 1) Ecrire la matrice de f , $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à sa base canonique.
- 2) Déterminer le noyau $\ker f$; f est-elle injective ?
- 3) Montrer que $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
 Déterminer la dimension et une base de $f(P)$

Exercice 18

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f[(x, y, z)] = (x+z, y-x, z+y+2x)$$

- 1) Déterminer les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer le rang de ce système de vecteurs images $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$
- 2) Déterminer le noyau de l'application f et la dimension de $f(\mathbb{R}^3)$. L'application f est-elle injective ?
 Donner la forme générale des vecteurs de $f(\mathbb{R}^3)$ et une base de ce sous-espace de $\mathbb{R}^4$

Exercice 19

On note $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\{x_1, x_2, x_3\}$ celle de $\mathbb{R}^3$. on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= x_1 + 2x_2 + x_3, \\ f(e_2) &= f(e_4) = -x_1 - 2x_2 + x_3, \\ f(e_3) &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

- 2) Déterminer une base du noyau de f ; en déduire le rang de f .
- 3) Déterminer une base de l'image de f .

Exercice 20

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le déterminant de A . La matrice A est-elle inversible ? Quel est le rang de l'application linéaire associé à A ?
- 2) Calculer les valeurs propres de A . Indiquer pourquoi la matrice A est diagonalisable.
 Déterminer une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale
- 3) On pose $B = \frac{1}{4}A$. Déduire des résultats précédents la matrice B^n .
- 4) Application : Calculer les suites réelles $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ définie par :

$$\begin{cases} u_n = \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-1} & u_0 = 2 \\ v_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{4}v_{n-1} & v_0 = 1 \end{cases}$$

Ces suites admettent-elles une limite quand n tend $+\infty$, autrement dit, sont-elles convergentes ?

Exercice 21

A) Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1) $\int \frac{1+x^5-x^6}{1-x} dx$; 2) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2} dx$; 3) $\int \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2} dx$; 4) $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} dx$

B) Calculer les intégrales définies suivantes :

1) $\int_2^3 \log(x^2-1) dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx$; 3) $\int_1^2 x \log \frac{x}{x+1} dx$; 4) $\int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$; 5) $\int_2^1 x(\log x)^2 dx$
4) $\int_0^1 x 2^x dx$

Exercice 22

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + 2 \ln \frac{x}{x-1}$

On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité 1cm

1° Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.

2° Etudier le sens de variation de f

3° Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à C . Préciser la position de C par rapport à Δ .

4° Tracer avec soin Δ et C

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x^2}$

1° Préciser l'ensemble de définition et de continuité de f

2° Etudier les branches infinies de f

3° Etudier le sens de variation de f et sa concavité.

4° Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f , entre les points A et B de graphe (C) d'abscisses $a = 1$ et $b = 2$ (c'est-à-dire déterminer le point C de l'arc AB du graphe, où la tangente au graphe est parallèle à la corde AB)

4° Tracer le graphe (C) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

5° On appelle $D(m)$ le domaine compris entre le graphe (C) , les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 1$ et $x = m$ où m est un paramètre réel strictement positif, Calculer, en fonction de m , l'aire $A(m)$ de ce domaine

6° Quel est le comportement de $A(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$? Interpréter graphiquement le résultat.



Bertrand NGNIE

*Chercheur ès Sciences de Gestion
A l'Université de Yaoundé II-SOA
Au Cameroun*

bertrandngnie@ymail.com