

Rattrapage d'Algèbre 2
 durée : 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés.

Exercice 1 : (10 points)

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice par rapport à la base

canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 est $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le rang de f et $\dim(\ker f)$.
- 2) Trouver $\ker f$.
- 3) Soient $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, -1)$.
 - i) Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
 - ii) En déduire que $u, v \in \text{Im} f$.
 - iii) Montrer que (u, v) est une base de $\text{Im} f$.
- 4) Soit $w = (2, 2, 1)$.
 - i) Montrer que $S = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - ii) Déterminer la matrice D de f par rapport à S (sans utiliser la matrice de passage).

Exercice 2 : (10 points)

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - z = 0\}$, $w = (1, 2, -1)$ et $F = \text{vect}(w)$.

- 1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et déterminer la dimension de E .
- 2) Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, 1, 3)$.
 - i) vérifier que $u, v \in E$.
 - ii) Montrer que (u, v) est une base de E .
- 3) Montrer que $S = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- 4) E et F sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ? Justifier.
- 5) Donner la matrice de passage P de la base canonique B de \mathbb{R}^3 à la base S de \mathbb{R}^3 .
- 6) Calculer P^{-1} .
- 7) Soit $a = (x, y, z)$ un vecteur quelconque fixé de \mathbb{R}^3
 - i) Déterminer les compnantes du vecteur a dans la base S (en utilisant la matrice de passage).
 - ii) En utilisant la question i), trouver le vecteur $b \in E$ et le vecteur $c \in F$ tels que $a = b + c$.
 - iii) Déterminer les deux vecteurs b et c pour $a = (3, 5, 8)$.

Bon courage