Fomesoutra.com ça soutra !

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2015-16
SMP-SMC

Correction du rattrapage d'Algèbre 2

Exercice 1 :

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \\ 6 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 6L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$L_3 \to L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc : $rgf = rgA = 2$.

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = rgf + \dim(\ker f) = 2 + \dim(\ker f) \Rightarrow \dim(\ker f) = 3 - 2 = 1.$

2) – **1ière méthode** :

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \to \frac{1}{2} L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \to L_2 + L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc : $\ker f = \{(2z, 2z, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

– **2ième méthode** :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 6x - 4x - 4z = 0 \\ 5x - 3x - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = 2z \end{cases}$$

Donc : $\ker f = \{(2z, 2z, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

3) i) $[f(u)]_B = \mathcal{M}(f, B)[u]_B = A[u]_B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc : $f(u) = (2, 2, 0)$.

$[f(v)]_B = \mathcal{M}(f, B)[v]_B = A[v]_B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc : $f(v) = (0, 1, -1)$.

ii) $f(u) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0) = 2u \Rightarrow u = \frac{1}{2}f(u) = f\left(\frac{1}{2}u\right) \in \mathrm{Im} f$.

$f(v) = (0, 1, -1) = v = f(v) \in \mathrm{Im} f$.

iii) – **1$^{\text{ière}}$ méthode** :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, -1) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, -\beta) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \alpha + \beta, -\beta) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \alpha = \alpha + \beta = -\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Alors (u, v) est un système libre de $\mathrm{Im} f$.

Puisque (u, v) est un système libre de $\mathrm{Im} f$ et puisque $\dim(\mathrm{Im} f) = rgf = 2$ alors (u, v) est une base de $\mathrm{Im} f$.

– **2$^{\text{ième}}$ méthode** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L_2 \to L_2 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors : $rg(u, v) = 2 = rgf = \dim(\mathrm{Im} f)$.

Donc (u, v) est une base de $\mathrm{Im} f$.

4) i) – **1$^{\text{ière}}$ méthode** :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(2, 2, 1) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, -\beta) + (2\gamma, 2\gamma, \gamma) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 2\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, \gamma - \beta) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = \gamma \\ -2\gamma + \gamma + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = \gamma \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $S = (u, v, w)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $S = (u, v, w)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$ qui contient trois vecteurs alors $S = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

– **2$^{\text{ième}}$ méthode** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_2 \to L_2 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $rgS = 3$. Donc $S = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

– **3$\underline{\text{ième}}$ méthode** :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc $S = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii) D'après 3) i) on a : $f(u) = 2u \quad et \quad f(v) = v$.

$$[f(w)]_B = \mathcal{M}(f, B)[w]_B = A[w]_B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $f(w) = (0, 0, 0)$. Ce qui montre que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

1) – **1$\underline{\text{ière}}$ méthode** :

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in E \Leftrightarrow 2x - y - z = 0 \Leftrightarrow z = 2x - y$.

Donc : $E = \{(x, y, 2x - y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 2x) + (0, y, -y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= vect((1, 0, 2), (0, 1, -1))$.

Ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$et que $((1, 0, 2), (0, 1, -1))$ est une base de E.

Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$et $\dim E = 2$.

– **2$\underline{\text{ième}}$ méthode** :

⋆ $2 \times 0 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$.

⋆ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall a = (x, y, z) \in E$ et $\forall a' = (x', y', z') \in E$.

$\alpha a + a' = \alpha(x, y, z) + (x', y', z') = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (x', y', z') = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$.

$(\alpha x + x') - (\alpha y + y') - (\alpha z + z') = 2\alpha x + 2x' - \alpha y - y' - \alpha z - z'$

$= (2\alpha x - \alpha y - \alpha z) + 2x' - y' - z'$

$= \alpha(2x - y - z) + 2x' - y' - z' = \alpha 0 + 0$

$= 0$.

Alors : $\alpha a + a' \in E$.

Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in E \Leftrightarrow 2x - y - z = 0 \Leftrightarrow z = 2x - y$.

Donc : $E = \{(x, y, 2x - y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 2x) + (0, y, -y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1) / x, y \in \mathbb{R}\} = vect((1, 0, 2), (0, 1, -1))$.

Ce qui montre que $((1, 0, 2), (0, 1, -1))$ est une base de E.

Par suite E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$et $\dim E = 2$.

2) i) $2 \times 1 - 1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow u = (1, 1, 1) \in E$.

$2 \times 2 - 1 - 3 = 4 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow v = (2, 1, 3) \in E$.

ii) – **1$^{\text{ière}}$ méthode** :

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(2,1,3) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha,\alpha,\alpha) + (2\beta,\beta,3\beta) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+2\beta,\alpha+\beta,\alpha+3\beta) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -\beta+2\beta = 0 \\ -\beta+3\beta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Donc (u,v) est un système libre de E.

Puisque $\dim E = 2$ et puisque (u,v) est un système libre de E qui contient deux vecteurs alors (u,v) est une base de E.

– **2$^{\text{ième}}$ méthode** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors : $rg(u,v) = 2 = rgf = \dim E$.

Donc (u,v) est une base de E.

3) – **1$^{\text{ière}}$ méthode** :

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(2,1,3) + \gamma(1,2,-1) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha,\alpha,\alpha) + (2\beta,\beta,3\beta) + (\gamma,2\gamma,-\gamma) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+2\beta+\gamma,\alpha+\beta+2\gamma,\alpha+3\beta-\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 0 \\ \alpha+3\beta-\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta-\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 0 \\ \alpha+3\beta-\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \beta \\ \alpha+\beta+2\beta = 0 \\ \alpha+3\beta-\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \beta \\ \alpha+3\beta = 0 \\ \alpha+2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = \beta \\ -2\beta+3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = \beta \\ \beta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $S = (u,v,w)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $S = (u,v,w)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$ qui contient trois vecteurs alors $S = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

– **2$^{\text{ième}}$ méthode** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors $rgS = 3$. Donc $S = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

– **3$^{\underline{\text{ième}}}$ méthode** :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Donc $S = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4).– **1$^{\underline{\text{ière}}}$ méthode** :

Puisque $\{u,v\}$ est une base de E, $\{w\}$ est une base de F (car $F = vect(w)$ et $w \neq 0$), $\{u,v\} \cap \{w\} = \emptyset$ et $\{u,v\} \cup \{w\} = \{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

– **2$^{\underline{\text{ième}}}$ méthode** :

$\forall a \in E \cap F$: $a \in E$ et $a \in F$.

$a \in F = vect(w) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / a = \alpha w = \alpha(1,2,-1) = (\alpha, 2\alpha, -\alpha)$

$a = (\alpha, 2\alpha, -\alpha) \in E \Rightarrow 2\alpha - 2\alpha - (-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow a = (0,0,0)$.

Alors $E \cap F = \{(0,0,0)\}$. Donc la somme de E et F est directe.

Puisque $F = vect(w)$ et $w \neq 0$ alors $\{w\}$ est une base de F.

Par suite $\dim F = 1$.

$\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Ce qui montre que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6) – **1$^{\underline{\text{ière}}}$ méthode** :

$$(P|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \to L_3 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to -L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \to L_1 - 2L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & -7 & 5 & 3 \\ I_3 & 3 & -2 & -1 \\ & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Donc : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

– **2$\underline{\text{ième}}$ méthode** :

$$\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \ , \ \Delta_{1,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \ , \ \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{2,1} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \ , \ \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \ , \ \Delta_{2,3} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ , \ \Delta_{3,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \ , \ \Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\Delta}({}^{t}comP) = \frac{1}{1}{}^{t}\begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7) i) $[a]_B = \mathcal{M}(B,S)[a]_S = P[a]_S \Rightarrow [a]_S = P^{-1}[a]_B = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -7x + 5y + 3z \\ 3x - 2y - z \\ 2x - y - z \end{pmatrix}$$

Donc les compsante du vecteur a dans la base S sont $-7x + 5y + 3z$, $3x - 2y - z$ et $2x - y - z$.

ii) D'après la question i), $a = (-7x + 5y + 3z)u + (3x - 2y - z)v + (2x - y - z)w$.

Alors : $b = (-7x + 5y + 3z)u + (3x - 2y - z)v \in E$, $c = (2x - y - z)w \in F$ et $a = b + c$.

$b = (-7x + 5y + 3z)u + (3x - 2y - z)v = (-7x + 5y + 3z)(1,1,1) + (3x - 2y - z)(2,1,3)$

$= (-7x + 5y + 3z, -7x + 5y + 3z, -7x + 5y + 3z) + (6x - 4y - 2z, 3x - 2y - z, 9x - 6y - 3z)$

$= (-x + y + z, -4x + 3y + 2z, 2x - y)$.

$c = (2x - y - z)(1,2,-1) = (2x - y - z, 4x - 2y - 2z, -2x + y + z)$.

iii) $b = (-3 + 5 + 8, -4 \times 3 + 3 \times 5 + 2 \times 8, 2 \times 3 - 5) = (10, -12 + 15 + 16, 6 - 5)$

$= (10, 19, 1)$.

$c = (2 \times 3 - 5 - 8, 4 \times 3 - 2 \times 5 - 2 \times 8, -2 \times 3 + 5 + 8)$

$= (6 - 5 - 8, 12 - 10 - 16, -6 + 5 + 8)$

$= (-7, -14, 7)$.