

Contrôle d'Algèbre 2
durée : 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés .

Exercice 1 : (6 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (3x - 2y - 2z, 5x - 3y - 4z, x - y).$$

- 1) Donner la matrice A de f par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer $\ker f$, une base de $\ker f$ et la dimension de $\ker f$. En déduire le rang de f .
- 3) Déterminer une base de $\text{Im } f$.

4) Soient $e'_1 = (0, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$, $e'_3 = (2, 2, 1)$. et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de

colonnes e'_1, e'_2, e'_3 . Montrer que P est inversible et calculer l'inverse P^{-1} .

5) En déduire que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) En remarquant que P est la matrice de passage de la base canonique B à la base B' , déterminer la matrice A' de f par rapport à la base B' .

Exercice 2 : (4 points)

Soit (Σ_m) le système d'équations linéaire suivant :

$$(\Sigma_m) \begin{cases} x & +2y & +3mz = 1 \\ x + (m+1)y & + (3m+1)z = 2 \\ x & +2y & +2mz = 0 \end{cases}$$

- 1) Donner la matrice A_m du système (Σ_m) et écrire (Σ_m) sous sa forme matricielle $A_m X = B$ (où $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qu'il faut déterminer et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'inconnue).
- 2) Montrer que $\det(A_m) = m(1 - m)$.
- 3) Quand est ce que (Σ_m) est un système de Cramer?.
- 4) Résoudre le système (Σ_m) pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

Exercice 3 : (10 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f

l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A par rapport à B .

- 1) Déterminer le rang de A .
- 2) a) Déterminer le polynôme caractéristique de f
b) En déduire que 1 et 2 sont les valeurs propres de f .

- 3) Déterminer les sous espaces propres de f et leur dimension. En déduire que f est diagonalisable.
- 4) Soit P la matrice de colonnes $u = (3, 2, 4)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (-2, -2, -3)$.
 - a) Calculer P^2 . En en déduire que P est inversible et donner P^{-1} (sans calcul).
 - b) En déduire que $S = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 5) Montrer que S est formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f par rapport à la base S .
- 6) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Bon courage