Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2014-15
SMP-SMC

Correction du contrôle d'Algèbre 2

Exercice 1 :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) **$1^{\text{ière}}$ méthode** :

$\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \in \ker f \Leftrightarrow f(a) = (3x-2y-2z, 5x-3y-4z, x-y) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-2z = 0 \\ 5x-3y-4z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x-2z = 0 \\ 2x-4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2z$$

Donc : $\ker f = \{(2z,2z,z) \quad \textit{tel que } z \in \mathbb{R}\}$.

Puisque $\ker f = \{z(2,2,1) \quad \textit{tel que } z \in \mathbb{R}\} = vect((2,2,1))$ alors $((2,2,1))$ est une base.du $\ker f$.

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = rgf + \dim \ker f = rgf + 1 \Rightarrow rgf = 3-1 = 2$.

$2^{\text{ième}}$ méthode :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to L_2 - L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x-2z = 0 \\ y-2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$.

Donc : $\ker f = \{(2z,2z,z) \quad \textit{tel que } z \in \mathbb{R}\}$.

Puisque $\ker f = \{z(2,2,1) \quad \textit{tel que } z \in \mathbb{R}\} = vect((2,2,1))$ alors $((2,2,1))$ est une base.du $\ker f$.

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = rgf + \dim \ker f = rgf + 1 \Rightarrow rgf = 3-1 = 2$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$L_2 \to L_2 - L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $((3,5,1),(-2,-3,-1))$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

4) **<u>1$^{\text{ière}}$ méthode</u>** :

$(P|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$L_2 \to L_2 - L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_3 \to L_3 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & -1 & 1 & 0 \\ I_3 & -1 & 2 & -2 \\ & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>2$^{\text{ième}}$ méthode</u> :

$\det P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc P est inversible.

$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_{1,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta_{2,1} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_{2,3} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_{3,2} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

Donc P est inversible et on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\ {}^t com(P) = \frac{1}{-1}\ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Puisque e'_1, e'_2, e'_3 sont les colonnes de P et puisque P est inversible alors $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) **<u>1$^{\text{ière}}$ méthode</u>** :

$$A' = P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>2$^{\text{ième}}$ méthode</u> :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}P$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 2</u> :

1) $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}.$

L'équation matricielle du système (Σ_m) est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2) Calculer $\det(A_m)$ en fonction de m.

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = -m(m-1) = m(1-m).$$

3) $\left(\Sigma_m\right)$ est un système de Cramer $\Leftrightarrow$ $m(1-m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ et $m \neq 1$.

4) $$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 2 & m+1 & 3m+1 \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & m-3 & 1-3m \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-3 & 1-3m \\ 2 & 2m \end{vmatrix}$$

$$= 2m(m-3) - 2(1-3m) = 2m^2 - 6m - 2 + 6m = 2m^2 - 2 = 2(m^2-1)$$
$$= 2(m-1)(m+1).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3m \\ 1 & 2 & 3m+1 \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & m+1 \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = 1-m.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1-m.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\det(A_m)} = \frac{2(m-1)(m+1)}{m(1-m)} = -\frac{2(m+1)}{m}.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det(A_m)} = \frac{1-m}{m(1-m)} = \frac{1}{m}. \qquad z = \frac{\Delta_z}{\det(A_m)} = \frac{1-m}{m(1-m)} = \frac{1}{m}.$$

Donc $\left(-\frac{2(m+2)}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$ est la seule solution du système $\left(\Sigma_m\right)$.

<u>Exercice 3</u> :

1) **<u>1$^{\text{ière}}$ méthode</u>** :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} L_1 \to L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2 + 8L_1 \\ L_3 \to L_3 + 12L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} L_2 \to 5L_2 - 3L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \longrightarrow L_3 + 12L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Donc $rgA = 3$.

<u>2$^{\text{ième}}$ méthode</u> :

$$\det A = \begin{vmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & 6 \\ -12 & -12 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -70 + 72 = 2 \neq 0.$$

Donc $rgA = 3$.

2) a) $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -7-X & 0 & 6 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -12 & 0 & 10-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -7-X & 6 \\ -12 & 10-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)[(-7-X)(10-X) + 72] = (1-X)(-70 + 7X - 10X + X^2 + 72)$$

$$= (1-X)(2 - 3X + X^2).$$

$\Delta = 9 - 8 = 1$. Donc les racines du polynôme $2 - 3X + X^2$ sont :

$x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Ce qui montre que $P_A(X) = (1-X)(1-X)(2-X) = (1-X)^2(2-X)$.

b) Les valeurs propres de f sont 1 et 2 (car 1 et 2 sont les racines du polynôme P_A).

3) **<u>1$^{\text{ière}}$ méthode</u>** :

- **<u>Pour déterminer E_1</u>** :

$\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$a \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8x + 6z \\ -8x + 6z \\ -12x + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 6z = 0 \\ -8x + 6z = 0 \\ -12x + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{8x}{6} = \frac{4x}{3} \\ z = \frac{12x}{9} = \frac{4x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = \left(x, y, \frac{4x}{3}\right).$$

Donc : $E_1 = \left\{\left(x, y, \frac{4x}{3}\right) \quad tq : x,y \in \mathbb{R}\right\}$ ou $E_1 = \left\{(3x, y, 4x) \quad tq : x,y \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_1 = \left\{\left(\frac{3z}{4}, y, z\right) \quad tq : y,z \in \mathbb{R}\right\}$ ou $E_1 = \left\{(3z, y, 4z) \quad tq : y,z \in \mathbb{R}\right\}$.

$$E_1 = \left\{\left(x, y, \frac{4x}{3}\right) \quad tq : x,y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(x, 0, \frac{4x}{3}\right) + (0,y,0) \quad tq : x,y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{x\left(1, 0, \frac{4}{3}\right) + y(0,1,0) \quad tq : x,y \in \mathbb{R}\right\} = vect\left(\left(1, 0, \frac{4}{3}\right), (0,1,0)\right).$$

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \alpha\left(1,0,\frac{4}{3}\right)+\beta(0,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left(\alpha,0,\frac{4\alpha}{3}\right)+(0,\beta,0) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha,\beta,\frac{4\alpha}{3}\right) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Alors $\left(\left(1,0,\frac{4}{3}\right),(0,1,0)\right)$ est un système libre de E_1.

Donc $\left(\left(1,0,\frac{4}{3}\right),(0,1,0)\right)$ est une base de E_1. Ce qui montre que $\dim E_1 = 2$.

- **Pour déterminer $\mathbf{E_2}$** :

$\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$a \in E_2 \Leftrightarrow (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9x+6z \\ -8x-y+6z \\ -12x+8z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x+6z = 0 \\ -8x-y+6z = 0 \\ -12x+8z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{9x}{6} = \frac{3x}{2} \\ -8x-y+9x = 0 \\ z = \frac{12x}{8} = \frac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = \frac{3x}{2} \end{cases}$$

Donc : $E_2 = \left\{\left(x,x,\frac{3x}{2}\right) \quad tq : x \in \mathbb{R}\right\}$ ou $E_2 = \left\{(2x,2x,3x) \quad tq : x \in \mathbb{R}\right\}$.

Alors : $E_2 = \left\{x\left(1,1,\frac{3}{2}\right) \quad tq : x \in \mathbb{R}\right\} = vect\left(\left(1,1,\frac{3}{2}\right)\right)$

ou $E_2 = \left\{x(2,2,3) \quad tq : x \in \mathbb{R}\right\} = vect((2,2,3))$

Ce qui montre que $\dim E_2 = 1$.

2^ième^ méthode :

- **Pour déterminer $\mathbf{E_1}$** :

$$A-I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_1 \to -\frac{1}{8}L_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2+8L_1 \\ L_3 \to L_3+12L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors : $\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a \in E_1 \Leftrightarrow x - \frac{3z}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3z}{4}$.

Donc : $E_1 = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, y, z \right) \quad tq \, : \, y,z \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_1 = \left\{ (3z, y, 4z) \quad tq \, : \, y,z \in \mathbb{R} \right\}$.

ou $E_1 = \left\{ \left(x, y, \frac{4x}{3} \right) \quad tq \, : \, x,y \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_1 = \left\{ (3x, y, 4x) \quad tq \, : \, x,y \in \mathbb{R} \right\}$

$$E_1 = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, y, z \right) \quad tq \, : \, y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, 0, z \right) + (0, y, 0) \quad tq \, : \, y,z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ z\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right) + y(0,1,0) \quad tq \, : \, y,z \in \mathbb{R} \right\} = vect\left(\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right), (0,1,0) \right)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, : \, \alpha\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right) + \beta(0,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{3\alpha}{4}, 0, \alpha \right) + (0, \beta, 0) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{3\alpha}{4}, 0, \alpha \right) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Alors $\left(\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right), (0,1,0) \right)$ est un système libre de E_1.

Donc $\left(\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right), (0,1,0) \right)$ est une base de E_1. Ce qui montre que $\dim E_1 = 2$.

- **<u>Pour déterminer $\mathbf{E_2}$</u>** :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2 + 8L_1 \\ L_3 \to L_3 + 12L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix} L_2 \to -\frac{1}{9}L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \to L_3 + 12L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \to L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2z}{3} = 0 \\ y - \frac{2z}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2z}{3}$

Donc : $E_2 = \left\{ \left(x, x, \frac{3x}{2} \right) \quad tq \, : \, x \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_2 = \left\{ (2x, 2x, 3x) \quad tq \, : \, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Alors : $E_2 = \left\{ x\left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \quad tq \, : \, x \in \mathbb{R} \right\} = vect\left(\left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right)$

ou $E_2 = \left\{ x(2,2,3) \quad tq \, : \, x \in \mathbb{R} \right\} = vect((2,2,3))$

Ce qui montre que $\dim E_2 = 1$.

Puisque $\dim E_1 + \dim E_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors *f* est digonalisable.

4) a) $P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Donc P est inversible et $P^{-1} = P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Puisque la matrice P de colonnes u, v et w est inversible alors $S = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) **1$^{\text{ière}}$ méthode** :

Puisque $u, v \in E_1 - \{(0,0,0)\}$ alors u et v sont des vecteurs propres de f associées. à 1.

Puisque $w = (-2,-2,-3) \in E_2 - \{(0,0,0)\}$ alors w est une vecteur propre de f associées à 2.

Ce qui montre que S est formée de vecteurs propres de f .

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2$^{\text{ième}}$ méthode :

$[f(u)]_B = A[u]_B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = [u]_B \Rightarrow f(u) = u$

Donc u est un vecteur propre de f associé à 1.

$[f(v)]_B = A[v]_B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [v]_B \Rightarrow f(v) = v$

Donc v est un vecteur propre de f associé à 1.

$[f(w)]_B = A[w]_B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= 2[w]_B = [2w]_B \Rightarrow f(w) = 2w$

Alors $f(w) = 2w$. Donc v est un vecteur propre de f associé à 2.

Ce qui montre que S est formée de vecteurs propres de f et on a :

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6) $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A^n = PD^nP^{-1} = PD^nP.$

<u>1ière méthode</u> :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2^{n+1} \\ 2 & 1 & -2^{n+1} \\ 4 & 0 & -3\times 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9-2^{n+3} & 0 & 6(2^n-1) \\ 8-2^{n+3} & 1 & 6(2^n-1) \\ 12(1-2^n) & 0 & 9\times 2^n - 8 \end{pmatrix}.$$

<u>2ième méthode</u> :

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2^{n+2} & 0 & -3\times 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9-2^{n+3} & 0 & 6(2^n-1) \\ 8-2^{n+3} & 1 & 6(2^n-1) \\ 12(1-2^n) & 0 & 9\times 2^n - 8 \end{pmatrix}.$$