Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2014-15
SMP-SMC

Rattrapage d'Algèbre 2
durée : 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés .

Exercice 1 : (4 points)

Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, $e'_1 = (1, 2, -1)$, $e'_2 = (3, 1, 2)$, $e'_3 = (1, 0, -1)$ et $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

1) Déterminer le rang de A.
2) En déduire que B' est une base de $\mathbb{R}^3$ (sans calcul).
3) Donner la matrice de passage P de B à B'.
4) En déduire que la matrice de f par rapport à B' est égale à A (sans calcul).

Exercice 2 : (7 points)

Résoudre suivant le paramétre réel m, le système d'équations linéaire suivant :

$$(\Sigma_m) \begin{cases} 2x + 3y + (m-1)z = 7 \\ x + y + (m-1)z = 3 \\ -x + (m-1)y = -2 \end{cases}$$

Exercice 3 : (9 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

1) Calculer le déterminant de A. En déduire que f est un automorphime de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer le polynôme caracteristique P_A de A.
3) En déduire que -1 et 2 sont les valeurs propres de f.
4) Déterminer les sous espaces propres E_{-1} et E_2.
5) Soient $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 0, -1)$, $w = (0, 2, -3)$ et $S = (u, v, w)$.
   a) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) En utilisant $u \in E_{-1}$ et $v, w \in E_2$ (sans démonstration), montrer que f est diagonalisable et
   donner la matrice D de f par rapport à la base S (sans utiliser les matrices de passage).
6) Vérifier que $D^2 - D = 2I_3$ et en déduire D^{-1} en fonction de D.
7) En utilisant la matrice de passage P de B à S, calculer A^{-1} (sans calculer P et P^{-1}).