Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2014-15
SMP-SMC

Correction du rattrapage d'Algèbre 2
durée : 1h30

Exercice 1 :

1) $A \underset{L_3 \longrightarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1}{}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Donc : $rgA = 3$.

2) Puisque $e'_1 = (1,2,-1)$, $e'_2 = (3,1,2)$ et $e'_3 = (1,0,-1)$ sont les colonnes de A et puisque $rgA = 3$ alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A$.

4) La matrice de f par rapport à B' est : $P^{-1}AP = A^{-1}AP = P = A$.

Exercice 2 :

Soient S_m l'ensmble des solutions de $\left(\sum_m\right)$ et $M_m = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & m-1 & 7 \\ 1 & 1 & m-1 & 3 \\ -1 & m-1 & 0 & -2 \end{array}\right)$.

$$M_m L_1 \leftrightarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 2 & 3 & m-1 & 7 \\ -1 & m-1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & m & m-1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longrightarrow L_3 - mL_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-1 & 1-m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & (m-1)(m+1) & 1-m \end{array}\right).$$

- **Si $\mathbf{m = -1}$** :

$$M_{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow S_1 = \emptyset.$$

- **Si $\mathbf{m = 1}$** :

$$M_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \to L_1 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Donc : $\left(\sum_1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Ce qui montre que : $S_1 = \{(2,1,z) \quad tq\ z \in \mathbb{R}\}$.

- **Si $\mathbf{m \neq 1}$ et si $\mathbf{m \neq -1}$** :

$$M_m \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & (m-1)(m+1) & 1-m \end{array}\right)$$

$$L_3 \to \frac{1}{(m-1)(m+1)} L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m+1} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \to L_1 + (1-m)L_3 \\ L_2 \to L_2 + (m-1)L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{4m+2}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m+1} \end{array}\right) L_1 \to L_1 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4m}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m+1} \end{array}\right).$$

Ce qui montre que : $S_m = \left\{\left(\frac{4m}{m+1}, \frac{2}{m+1}, -\frac{1}{m+1}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{m+1}(4,2,-1)\right\}$.

Exercice 3 :

1) $\det A = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 2(-56+54) = 2(-2) = -4.$

Puisque $\det A \neq 0$ alors A est inversible. Donc f est un automorphime de $\mathbb{R}^3$.

2) $P_A = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 8-X & 9 & 6 \\ -6 & -7-X & -6 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 8-X & 9 \\ -6 & -7-X \end{vmatrix}$

$= (2-X)[(8-X)(-7-X) + 9 \times 6] = (2-X)(-56 - X + X^2 + 54)$

$= (2-X)(X^2 - X - 2).$

$\Delta = 1 + 8 = 9.$ Donc les racines de $X^2 - X - 2$ sont :

$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$

Donc : $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1).$

Par suite : $P_A = (2-X)(X-2)(X+1) = (2-X)(2-X)(-1-X) = (2-X)^2(-1-X)$

ou $P_A = (2-X)(X-2)(X+1) = -(X-2)(X-2)(X+1) = -(X-2)^2(X+1).$

3) Puisque -1 et 2 sont les racines de P_A alors -1 et 2 sont les valeurs propres de f.

4) **$1^{\text{ière}}$ méthode** :

- $\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$a \in E_{-1} \Leftrightarrow f(a) = -a \Leftrightarrow (8x+9y+6z, -6x-7y-6z, 2z) = -(x,y,z) = (-x,-y,-z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+9y+6z = -x \\ -6x-7y-6z = -y \\ 2z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+9y+6z = 0 \\ -6x-6y-6z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 9x+9y = 0 \\ -6x-6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 9(x+y) = 0 \\ -6(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}.$$

Donc : $E_{-1} = \left\{(x,-x,0) \quad tq \;\; x \in \mathbb{R}\right\}$.

- $\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$a \in E_2 \Leftrightarrow f(a) = 2a \Leftrightarrow (8x+9y+6z, -6x-7y-6z, 2z) = 2(x,y,z) = (2x,2y,2z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+9y+6z = 2x \\ -6x-7y-6z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y+6z = 0 \\ -6x-9y-6z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 6x+9y+6z = 0 \Leftrightarrow 2x+3y+2z = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3y+2z}{2}$ ou $y = -\dfrac{2(x+z)}{3}$ ou $z = -\dfrac{3x+2y}{2}$.

Donc : $E_2 = \left\{\left(-\dfrac{3y+2z}{2}, y, z\right) \quad tq \;\; y,z \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \left\{(-3\alpha-2\beta, 2\alpha, 2\beta) \quad tq \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \left\{\left(x, -\dfrac{2(x+z)}{3}, z\right) \quad tq \;\; x,z \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \left\{(3\alpha, -2(\alpha+\beta), 3\beta) \quad tq \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \left\{\left(x, y, -\dfrac{3x+2y}{2}\right) \quad tq \;\; x,y \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \left\{(2\alpha, 2\beta, -3\alpha-2\beta) \quad tq \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$.

$2^{\text{ième}}$ méthode :

- $A + I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$L_2 \to -\frac{1}{6}L_2 \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_2 \to L_2 - 9L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to -\frac{1}{3}L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 - 3L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \to L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Donc : $E_{-1} = \{(x,-x,0) \quad tq \;\; x \in \mathbb{R}\}$.

- $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ -6 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$L_2 \to L_2 + L_1 \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \to -\frac{1}{2}L_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \in E_2 \Leftrightarrow 2x + 3y + 2z = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3y+2z}{2}$ ou $y = -\frac{2(x+z)}{3}$ ou $z = -\frac{3x+2y}{2}$.

Donc : $E_2 = \left\{\left(-\frac{3y+2z}{2}, y, z\right) \quad tq \;\; y,z \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \{(-3\alpha - 2\beta, 2\alpha, 2\beta) \quad tq \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

ou $E_2 = \left\{\left(x, -\frac{2(x+z)}{3}, z\right) \quad tq \;\; x,z \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \{(3\alpha, -2(\alpha+\beta), 3\beta) \quad tq \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

ou $E_2 = \left\{\left(x, y, -\frac{3x+2y}{2}\right) \quad tq \;\; x,y \in \mathbb{R}\right\}$

ou $E_2 = \{(2\alpha, 2\beta, -3\alpha - 2\beta) \quad tq \;\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

5) a) **1ière méthode** :

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0) &\Leftrightarrow \alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,2,-3) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta, -\alpha + 2\gamma, -\beta - 3\gamma) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -3\gamma \\ 2\gamma - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -3\gamma \\ -\gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma. \end{aligned}$$

Alors S est un système libre de $\mathbb{R}^3$. Donc S est une base de $\mathbb{R}^3$.

2^ième^ méthode :

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

On a : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3+2 = -1 \neq 0.$

Ce qui montre que S est une base de $\mathbb{R}^3$.

3^ième^ méthode :

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} L_2 \to L_2 + L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ce qui montre que S est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Puisque S est une base de $\mathbb{R}^3$.formée de vecteus propres de f alors f est diagonalisable.

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6) Vérifier que $D^2 - D = 2I_3$ et en déduire D^{-1} en fonction de D.

$$D^2 - D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

$D^2 - D = 2I_3 \Rightarrow D^2 - I_3 D = 2I_3 \Rightarrow (D - I_3)D = 2I_3 \Rightarrow \frac{1}{2}(D - I_3)D = I_3$.

Donc : $D^{-1} = \frac{1}{2}(D - I_3)$.

7) Puisque $D = P^{-1}AP$ alors $A = PDP^{-1}$. Par suite on a :

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P\left[\frac{1}{2}(D - I_3)\right]P^{-1} = \frac{1}{2}P[(D - I_3)]P^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(PDP^{-1} - PI_3P^{-1}) = \frac{1}{2}(PDP^{-1} - PP^{-1}) = \frac{1}{2}(A - I_3)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 \\ -6 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$