

 Institut de Formation Sainte Marie	<b>BTS BLANC 2025</b> Epreuve écrite de : MATHEMATIQUES GENERALES	Année Académique : 2024-2025
		Filière : ELT
Durée : 03H00	Samedi 26 Avril 2025	Coefficient : 03

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.

### EXERCICE 1

L'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa base canonique  $B_0 = (e_1; e_2; e_3)$ .

On considère l'endomorphisme  $f$  défini de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\begin{cases} f(e_1) = -3e_1 + 8e_2 - 4e_3 \\ f(e_2 + e_1) = -4e_1 + 11e_2 - 5e_3 \\ f(e_2 - e_3) = -2e_1 + 5e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

1) a) Ecrire  $f(e_1)$ ;  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$  en fonction de  $e_1$ ;  $e_2$  et  $e_3$ .

b) Si  $A$  désigne la matrice de l'endomorphisme  $f$  relativement à la base canonique  $B_0$ , montrer que

$$t_A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (t_A \text{ désigne la transposée de la matrice } A).$$

2) L'endomorphisme  $f$  est-il un automorphisme ?

3) a) Déterminer le noyau  $\ker(f)$  de  $f$  et donner une base de  $\ker(f)$ .

b) Déterminer l'image  $\text{Im}(f)$  de  $f$  et donner une base de  $\text{Im}(f)$ .

4) Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  on donne :

$$u_1 = -e_1 + e_2 - e_3$$

$$u_2 = e_1 + e_3$$

$$u_3 = -e_1 - e_2 + 2e_3$$

a) Montrer que  $B_1 = (u_1; u_2; u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $B_0$  à la base  $B_1$ .

c) La matrice  $P$  est-elle inversible ? Si oui, déterminer les expressions des vecteurs  $e_1$ ;  $e_2$  et  $e_3$  en fonction des vecteurs  $u_1$ ;  $u_2$  et  $u_3$ . (On pourra calculer  $P^{-1}$ , inverse de la matrice  $P$ ).

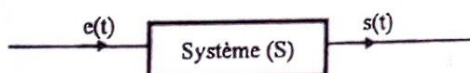
5) On suppose que la matrice  $P$  est inversible et on désigne par  $M$  la matrice de l'endomorphisme  $f$  relativement à la base  $B_1$ .

a) Calculer  $M = P^{-1}AP$ ;

b) Déterminer les expressions de  $f(u_1)$ ;  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ;  $u_2$  et  $u_3$ .

### EXERCICE 2

On considère un système « entrée-sortie » suivant :



Dans le système représenté ci-dessus,  $e$  et  $s$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, causaux c'est-à-dire (nuls pour  $t$  négatif). On suppose que le système est régi par l'équation différentielle (E) définie par :

$$(E) : LC \frac{d^2s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

$L, R$  et  $C$  sont des constantes réelles strictement positives et de plus, on a :

$$s(0^+) = 0 \text{ et } \frac{ds}{dt}(0^+) = 0.$$

On suppose que les fonctions  $e$  et  $s$  admettent des transformées de Laplace notées respectivement  $E$  et  $S$ .

1) La fonction de transfert  $H$  du système est définie par :  $S(p) = H(p) \times E(p)$  où  $H(p) \times E(p)$  désigne le produit des fonctions  $H(p)$  et  $E(p)$ .  
En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E), montrer

$$\text{que } H(p) = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

2) On suppose que  $e(t) = U(t-1) - U(t-2)$

Où  $U$  est la fonction échelon unité définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

a) Donner l'expression de  $e(t)$  sur les intervalles  $]-\infty; 1[$ ;  $[1; 2[$  et  $[2; +\infty[$ .

b) Représenter graphiquement la fonction  $e$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O; i; j)$  d'unité graphique 2 cm.

c) Déterminer  $E(p)$  (où  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$ ).

3) Dans la suite de l'exercice, on considère que :  $L = 2 \text{ H}$ ;  $R = 1000 \Omega$  et  $C = 2 \times 10^{-6} \text{ F}$ .

a) Montrer que :  $H(p) = \frac{(500)^2}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$ .

b) Montrer que :  $\frac{1}{p} H(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+250}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$ .

4)

a) Déterminer l'original  $h_1$  de la fonction  $\frac{1}{p} H(p)$ .

b) Exprimer  $s(t)$  à l'aide de  $h_1(t)$ .

5) Donner l'expression de  $s(t)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty; 1[$ ;  $[1; 2[$  et  $[2; +\infty[$ .

### EXERCICE 3

1) On donne le nombre complexe suivant  $a = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$ .

a) Ecrire  $a$  sous la forme algébrique.

b) Ecrire  $a$  sous la forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{-11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{-11\pi}{12}$ .

2) Soit le nombre complexe  $z = x + iy$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}$ .

On considère  $A, B$  et  $M$  des points du plan d'affixes respectives  $1, 2i$  et  $z$ .

On pose  $Z = \frac{z-1}{z-2i}$  où  $z \neq 2i$  tel que  $Z = X + iY$  où  $X$  et  $Y$  sont des nombres réels.

a) Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

b) Démontrer que l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z = x + iy$  tels que  $Z$  soit un nombre réel est la droite d'équation (D):  $y = -2x + 2$  privée du point  $A$ .

3) Déterminer l'ensemble (E) des points  $M$  du plan tels que  $|Z| = \frac{1}{2}$ .



Institut de Formation Sainte Marie

# CORRECTION BTS BLANC 2025

Epreuve écrite de :

MATHEMATIQUES GENERALES

Année : 2024-2025

Filière : ELT

## EXERCICE 1 (8/8)

1) a) Ecrivons  $f(e_1)$  ;  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$  en fonction de  $e_1$  ;  $e_2$  et  $e_3$ .

- $f(e_1) = -3e_1 + 8e_2 - 4e_3$
- $f(e_2 + e_1) = -4e_1 + 11e_2 - 5e_3$   
 $f(e_2) + f(e_1) = -4e_1 + 11e_2 - 5e_3$   
 $f(e_2) = -4e_1 + 11e_2 - 5e_3 - f(e_1)$   
 $f(e_2) = -4e_1 + 11e_2 - 5e_3 + 3e_1 - 8e_2 + 4e_3$   
 Donc  $f(e_2) = -e_1 + 3e_2 - e_3$
- $f(e_2 - e_3) = -2e_1 + 5e_2 - 3e_3$   
 $f(e_2) - f(e_3) = -2e_1 + 5e_2 - 3e_3$   
 $-f(e_3) = -2e_1 + 5e_2 - 3e_3 - f(e_2)$   
 $-f(e_3) = -2e_1 + 5e_2 - 3e_3 + e_1 - 3e_2 + e_3$   
 Donc  $f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 2e_3$

En conclusion :

$$\begin{cases} f(e_1) = -3e_1 + 8e_2 - 4e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + 3e_2 - e_3 \\ f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

→ 0,5x3

b) Montrer que  $t_A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  ( $t_A$  désigne la transposée de la matrice A).

On a :  $A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$  D'où  $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  → 0,5

Donc

$$t_A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

→ 0,25

2) L'endomorphisme  $f$  est un automorphisme  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (-18 - 8 - 8) - (-12 - 6 - 16)$$

$\det(A) = 0$  donc  $f$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

→ 0,5

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} \quad \text{d'où} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0,5$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = (1 - 1) - (1 + 2) = -3$$

$\det(C) \neq 0$  alors  $B_1$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  $\rightarrow 0,5$

b) Déterminons la matrice de passage  $P$  de la base  $B_0$  à la base  $B_1$ .

$$P = C \text{ donc } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0,5$$

c) Inversion de la matrice  $P$

$$\text{On a : } \det(P) = \det(C) = -3$$

$\det(P) \neq 0$  donc  $P$  est inversible et son inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} t_{Com(P)}$$

$$Com(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad t_{Com(P)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 0,25$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow 0,5$$

Les expressions de  $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  en fonction de  $\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2$  et  $\mathbf{u}_3$  sont :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 \end{cases} \rightarrow 0,5$$

4) a) Calculer  $M = P^{-1}AP$

3) a) Déterminons le noyau  $\ker(f)$  de  $f$  et donnons une base de  $\ker(f)$ .

$$\ker(f) = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 8x + 3y - 2z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases} \rightarrow 0,5$$

D'où

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x, x \in \mathbb{R}^*$$

Donc

$$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \dim \ker(f) = 1$$

Le noyau est une droite vectorielle dont une base est  $\{u_1\}$  avec  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ 0,25

b) Déterminons l'image  $\text{Im}(f)$  de  $f$  et donnons une base de  $\text{Im}(f)$ .

$$\dim \text{Im}(f) + \dim \ker(f) = 3 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 3 - 1 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2$$

D'où

$\text{Im}(f)$  est engendrée par deux vecteurs colonnes linéairement indépendants de la matrice  $A$ .

Soit  $C_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  deux vecteurs colonnes de la matrice  $A$ .

Soit  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha C_1 + \beta C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha - \beta = 0 \\ 8\alpha + 3\beta = 0 \\ -4\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

→ 0,25

D'où : les vecteurs colonnes  $C_1$  et  $C_2$  sont linéairement indépendants,

Donc

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\text{Im}(f)$  est un plan vectoriel dont une base est  $(u_1; u_2)$  avec  $u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ 0,25

4) Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  on donne :

$$u_1 = -e_1 + e_2 - e_3$$

$$u_2 = e_1 + e_3$$

$$u_3 = -e_1 - e_2 + 2e_3$$

a) Montrons que  $B_1 = (u_1; u_2; u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $C$  la matrice de  $B_1$ .

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} & 3 & -\frac{5}{3} \\ \frac{13}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} & 3 & -\frac{5}{3} \\ \frac{13}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -14 \\ -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $M = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -14 \\ -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ 0,5

b) Déterminons les expressions de  $f(u_1)$ ;  $f(u_2)$  et  $f(u_3)$  en fonction de  $u_1$ ;  $u_2$  et  $u_3$ .

On a  $M = \text{mat}_{B_1}(f) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ -3 & 6 & -14 \\ -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$

Donc

$$\begin{cases} f(u_1) = -3u_1 - 2u_2 \\ f(u_2) = 6u_1 + 4u_2 \\ f(u_3) = -14u_1 - 7u_2 + u_3 \end{cases}$$

→ 0,75

**EXERCICE 2 (7/7)**

1) Montrons que  $H(p) = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$ .

On a :  $LC \frac{d^2s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$

$$\mathcal{L} \left[ LC \frac{d^2s}{dt^2} \right] + \mathcal{L} \left[ RC \frac{ds}{dt} \right] + \mathcal{L}[s(t)] = \mathcal{L}[e(t)]$$

$$LC[P^2S(P) - PS(0^+) - S'(0^+)] + RC[PS(P) - S(0^+)] + S(P) = E(P)$$

$$S(P)[LCP^2 + RCP + 1] = E(P)$$

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{LCP^2 + RCP + 1}$$

$$H(P) = \frac{LC(\frac{1}{LC})}{LC(P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC})} \text{ donc}$$

$$H(P) = \frac{\frac{1}{LC}}{P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}}$$

→ 0,5

→ 0,5

2) On a  $e(t) = U(t - 1) - U(t - 2)$

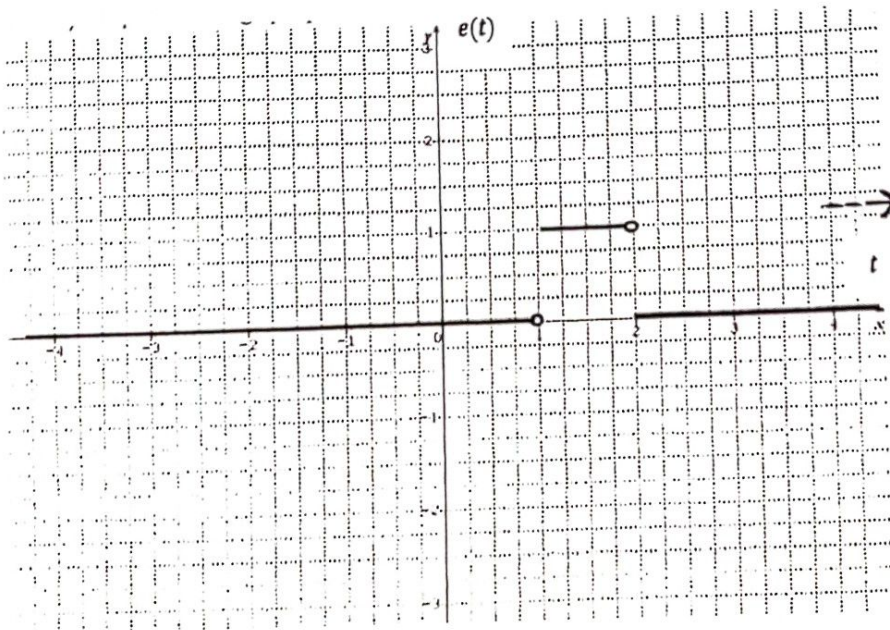
a) Donner l'expression de  $e(t)$  sur les intervalles  $]-\infty; 1[$ ;  $[1; 2[$  et  $[2; +\infty[$ .

t	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$U(t - 1)$	0	1	1	1
$U(t - 2)$	0	0	0	1
$-U(t - 2)$	0	0	0	-1
$e(t)$	0	1	1	0

Donc

$$\begin{cases} \forall t \in ]-\infty; 1[, e(t) = 0 \\ \forall t \in [1; 2[, e(t) = 1 \\ \forall t \in [2; +\infty[, e(t) = 0 \end{cases}$$

b) Représenter graphiquement de la fonction  $e$



c) Déterminer  $E(p)$  (où  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  ).\*

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[U(t - 1) - U(t - 2)]$$

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[U(t - 1)] - \mathcal{L}[U(t - 2)]$$

$$E(p) = e^{-p} \times \frac{1}{p} - e^{-2p} \times \frac{1}{p} \quad \text{donc}$$

$$E(p) = \frac{e^{-p} - e^{-2p}}{p}$$

3) On considère que :  $L = 2 \text{ H}$  ;  $R = 1000 \Omega$  et  $C = 2 \times 10^{-6} \text{ F}$ .

a) Montrons que :  $H(p) = \frac{(500)^2}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$ .

On a :  $H(P) = \frac{\frac{1}{2 \times 2 \times 10^{-6}}}{P^2 + \frac{1000}{2}P + \frac{1}{2 \times 2 \times 10^{-6}}}$

$$H(P) = \frac{250\,000}{P^2 + 500P + 250\,000} = \frac{(500)^2}{[P^2 + 2 \times 250P + 62\,500] + 187\,500}$$

Donc

$$H(P) = \frac{(500)^2}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$$

0,5

b) Montrons que :  $\frac{1}{P}H(P) = \frac{1}{P} - \frac{P+250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$

On a :  $H(P) = \frac{(500)^2}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$

En multipliant tous les membres par  $\frac{1}{P}$  obtient :

$$\frac{1}{P}H(P) = \frac{1}{P} \times \frac{(500)^2}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} \text{ d'où } \frac{1}{P}H(P) = \frac{(500)^2}{P[(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2]}$$

0,5

Par ailleurs :

$$\frac{1}{P} - \frac{P+250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} = \frac{1}{P} + \frac{-P-250-250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{1}{P} - \frac{P+250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} = \frac{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2 - P^2 - 500P}{P[(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2]}$$

$$\frac{1}{P} - \frac{P+250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} = \frac{P^2 + 500P + 250\,000 - P^2 - 500P}{P[(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2]}$$

D'où

$$\frac{1}{P} - \frac{P+250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} = \frac{500^2}{P[(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2]}$$

0,5

Donc

$$\frac{1}{P}H(P) = \frac{1}{P} - \frac{P+250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(P+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$$

0,5

4)

a) Déterminons l'original  $h_1$  de la fonction  $\frac{1}{P}H(P)$ .

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P}H(P)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P+250}{(P+250)^2+(250\sqrt{3})^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{250}{(P+250)^2+(250\sqrt{3})^2}\right]$$

$$h_1(t) = U(t) - e^{-250t} \cos(250\sqrt{3}t) U(t) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-250t} \sin(250\sqrt{3}t) U(t)$$

$$h_1(t) = \left[ 1 - \left( \cos(250\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(250\sqrt{3}t) \right) e^{-250t} \right] U(t)$$

0,5

b) Exprimons  $s(t)$  à l'aide de  $h_1(t)$ .

$$\text{On a : } S(P) = H(P) \times E(P)$$

$$S(P) = \frac{(500)^2}{(P+250)^2+(250\sqrt{3})^2} \times \frac{e^{-P}-e^{-2P}}{P}$$

$$S(P) = \frac{1}{P} H(P) \times (e^{-P} - e^{-2P})$$

$$S(P) = \frac{1}{P} H(P) e^{-P} - \frac{1}{P} H(P) e^{-2P}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[S(P)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P} H(P) e^{-P}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{P} H(P) e^{-2P}\right]$$

$$s(t) = h_1(t-1)U(t-1) - h_1(t-2)U(t-2)$$

Donc

$$s(t) = \left[ 1 - \left( \cos(250\sqrt{3}(t-1)) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(250\sqrt{3}(t-1)) \right) e^{-250(t-1)} \right] U(t-1) - \left[ 1 - \left( \cos(250\sqrt{3}(t-2)) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(250\sqrt{3}(t-2)) \right) e^{-250(t-2)} \right] U(t-2)$$

0,5

5) Donnons l'expression de  $s(t)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty; 1[$ ;  $[1; 2[$  et  $[2; +\infty[$ .

$$\bullet \forall t \in ]-\infty; 1[, U(t-1) = U(t-2) = 0$$

$$\text{Donc } S(t) = 0$$

0,25

$$\bullet \forall t \in [1; 2[, U(t-1) = 1 \text{ et } U(t-2) = 0$$

$$\bullet \text{Donc } S(t) = h_1(t-1)$$

$$S(t) = \left[ 1 - \left( \cos(250\sqrt{3}(t-1)) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(250\sqrt{3}(t-1)) \right) e^{-250(t-1)} \right]$$

0,25

0,25

$$\bullet \forall t \in [2; +\infty[, U(t-1) = 1 \text{ et } U(t-2) = 1$$

$$\text{Donc } S(t) = h_1(t-1) - h_1(t-2)$$

$$S(t) = \left[ - \left( \cos(250\sqrt{3}(t-1)) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(250\sqrt{3}(t-1)) \right) e^{-250(t-1)} \right] + \left[ \left( \cos(250\sqrt{3}(t-2)) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(250\sqrt{3}(t-2)) \right) e^{-250(t-2)} \right]$$

0,25

### EXERCICE 3 (5/5)

1) On donne le nombre complexe suivant  $a = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$ .

a) Ecrivons  $a$  sous la forme algébrique.

$$a = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i} \Rightarrow a = \frac{(-1-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \Rightarrow a = \frac{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}i-1}{(\sqrt{3})^2+1^2} \Rightarrow a = \frac{(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{4}$$

Donc la forme algébrique de  $a$  est :

$$a = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

0,5

b) Ecrire  $a$  sous la forme trigonométrique.

$$a = |a|[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \quad \text{avec } \theta = \arg(a)$$

- $|a| = \left| \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i} \right| \Rightarrow |a| = \frac{|-1-i|}{|\sqrt{3}+i|} \Rightarrow |a| = \frac{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}} \quad |a| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$

Donc

$$|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0,5

- $\arg(a) = \arg\left(\frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}\right)$   
 $\arg(a) = \arg(-1-i) - \arg(\sqrt{3}+i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

\*\* Soit  $\theta_1 = \arg(-1-i)$  avec  $|-1-i| = \sqrt{2}$

On a :  $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

0,5

\*\* Soit  $\theta_2 = \arg(\sqrt{3}+i)$  avec  $|\sqrt{3}+i| = 2$

On a :  $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

0,5

D'où  $\theta = \frac{-3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc  $\theta = \frac{-11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

0,5

Par conséquent, la forme trigonométrique de  $a$  est :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{-11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]$$

0,5

c) En déduisons les valeurs exactes de  $\cos \frac{-11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{-11\pi}{12}$ .

On a :

$$a = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1-\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( \frac{-11\pi}{12} \right) + \sin \left( \frac{-11\pi}{12} \right) \right]$$

$$\text{D'où} \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( \frac{-11\pi}{12} \right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( \frac{-11\pi}{12} \right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Donc 
$$\begin{cases} \cos \left( \frac{-11\pi}{12} \right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin \left( \frac{-11\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

0,5

a) Exprimons  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

$$\text{On a : } Z = \frac{z-1}{z-2i} \quad \text{où } z \neq 2i \text{ tel que } Z = X + iY$$

$$\text{avec } z = x + iy \text{ tel que } (x; y) \neq (0; 2)$$

Alors

$$Z = \frac{x+iy-1}{x+iy-2i} = \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-2)} = \frac{[(x-1)+iy][x-i(y-2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]} = \frac{(x-1)x-i(x-1)(y-2)+iyx+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

$$\text{D'où } Z = \frac{[(x-1)x+y(y-2)]+i[yx-(x-1)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$$

Donc 
$$\begin{cases} X = \frac{(x-1)x+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} \\ Y = \frac{yx-(x-1)(y-2)}{x^2+(y-2)^2} \end{cases}$$

avec  $(x; y) \neq (0; 2)$

0,5

b) Démontrons que l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z = x + iy$  tels que  $Z$  soit un nombre réel est la droite d'équation  $(D): y = -2x + 2$  privée du point  $A$ .

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{yx-(x-1)(y-2)}{x^2+(y-2)^2} = 0 \text{ avec } (x; y) \neq (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow yx - (x-1)(y-2) = 0 \text{ avec } (x; y) \neq (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow yx - xy + 2x + y - 2 = 0 \text{ avec } (x; y) \neq (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0 \text{ avec } (x; y) \neq (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -2x + 2 \text{ avec } (x; y) \neq (0; 2)$$

Donc l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z = x + iy$  tels que  $Z$  soit un nombre réel est la droite d'équation  $(D): y = -2x + 2$  privée du point  $A$ .

0,5

2) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que  $|Z| = \frac{1}{2}$ .

$$Z \in (E) \Leftrightarrow |Z| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |Z|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |Z|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Or } Z = \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-2)}$$

Ainsi

$$|Z|^2 = \frac{[(x-1)+iy]^2}{[x+i(y-2)]^2} \Rightarrow |Z|^2 = \frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+(y-2)^2} \Rightarrow |Z|^2 = \frac{x^2-2x+1+y^2}{x^2+y^2-4y+4}$$

D'où

$$Z \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1+y^2}{x^2+y^2-4y+4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 3y^2 + 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[x^2 - \frac{8}{3}x\right] + 3\left[y^2 + \frac{4}{3}y\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 - \frac{8}{3}x\right] + \left[y^2 + \frac{4}{3}y\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left[y - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2 = \frac{20}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left[y - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2 = \frac{4 \times 5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left[y - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

L'ensemble (E) des points M du plan tels que  $|Z| = \frac{1}{2}$  est le cercle de centre

$$\Omega\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ et de rayon } r = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

→ 0,5