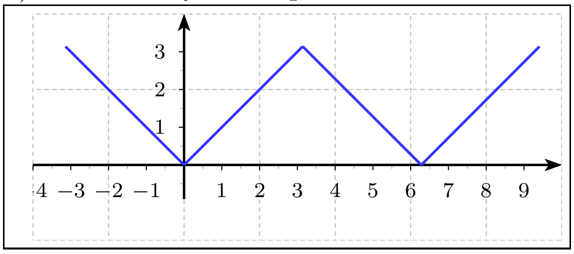
EXERCICE signal triangle

On considère la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0;\pi]$ par $f(t) = t$

1) Dessin de f sur 2 périodes.



2) Coefficients a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \int_0^\pi t dt \text{ car } f \text{ est paire, } 2\pi\text{-périodique et égale à } t \text{ sur } [0;\pi]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \times \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n > 0$, on a : $a_n = \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_0^\pi t \cos(nt) dt$

Intégrons par parties :

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(nt)$,

On calcule $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{n}\sin(nt)$,

On obtient : $I = \left[\dfrac{t}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\pi \sin(nt) dt$

Puis $I = 0 - 0 \quad - \quad \dfrac{1}{n^2}\left[-\cos(nt)\right]_0^\pi$

C'est à dire $I = \dfrac{1}{n^2}(\cos(n\pi) - 1)$

Finalement $\boxed{a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1)}$

3) Les coefficients b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Puisque le signal est paire, tous les b_n sont nuls.

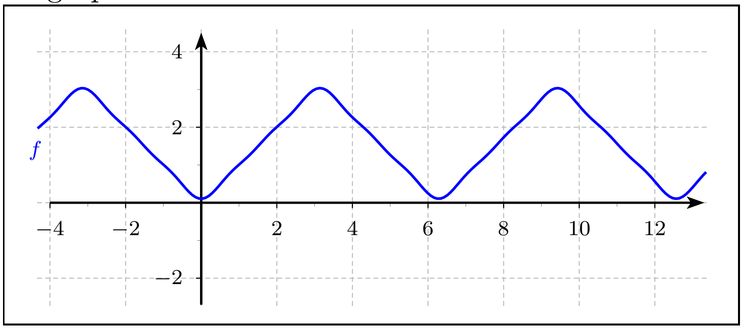
On considère $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Puisque tous les b sont nuls et que

n	0	1	2	3	4	5
$a(n)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-4}{\pi}$	0	$\frac{-4}{9\pi}$	0	$\frac{-4}{25\pi}$

On peut écrire $\boxed{S_5(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(t) - \frac{4}{9\pi}\cos(3t) - \frac{4}{25\pi}\cos(5t)}$

Le grapheur nous donne la courbe suivante :



Le carré de la valeur efficace de f est égal à : $V_{eff}^2 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt$ car la fonction f^2 est paire.

donc $V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}$

C'est à dire $V_{eff}^2 = \boxed{\frac{\pi^2}{3}} \approx 3,290$

Par ailleurs, la formule de Parseval appliquée à la série de Fourier tronquée à l'ordre 5 donne :

$$W_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{81\pi^2} + \frac{16}{635\pi^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \times \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625}\right)} \approx 3,290$$

Le rapport $\frac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,999$ ce qui signifie que $\boxed{S_5 \text{ est une très bonne approximation de } f}$
et cela justifie donc l'abandon des termes de rangs supérieurs à 5.