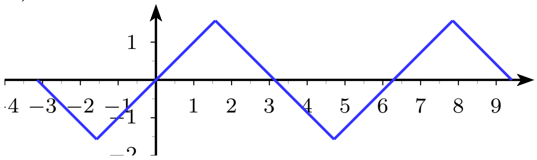
EXERCICE signal triangle

On considère la fonction impaire, 2π-périodique, définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par $f(t)=t$ et sur $]\frac{\pi}{2};\pi]$ par $f(t)=\pi-t$

1) Dessin de f sur 2 périodes.



2) Coefficients a

Puisque le signal est impaire, tous les a_n sont nuls. Y compris le terme a_0

3) Les coefficients b_n pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin(nt)dt$$

Puisque l'expression de $f(t)$ change suivant l'intervalle sur lequel on se trouve, on morcelle en deux

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}t\sin(nt)dt+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\sin(nt)dt\right)=\frac{2}{\pi}(I+J)$$

Intégrons I par parties :

On pose $u(t)=t$ et $v'(t)=\sin(nt)$,

On calcule $u'(t)=1$ et $v(t)=\dfrac{-1}{n}\cos(nt)$,

On obtient : $I=\left[\dfrac{-t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi/2}-\dfrac{-1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(nt)dt$

Puis $I=\dfrac{-\pi}{2n}\cos(\dfrac{n\pi}{2})-0+\dfrac{1}{n^2}\left[\sin(nt)\right]_0^{\pi/2}$

C'est à dire $I=\dfrac{-\pi}{2n}\cos(\dfrac{n\pi}{2})+\dfrac{1}{n^2}\sin(\dfrac{n\pi}{2})$

Intégrons J par parties :

On pose $u(t)=\pi-t$ et $v'(t)=\sin(nt)$,

On calcule $u'(t)=-1$ et $v(t)=\dfrac{-1}{n}\cos(nt)$,

On obtient : $J=\left[-\dfrac{\pi-t}{n}\cos(nt)\right]_{\pi/2}^{\pi}-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)dt$

Puis $J=0+\dfrac{\pi}{2n}\cos(\dfrac{n\pi}{2})-\dfrac{1}{n^2}\left[\sin(nt)\right]_{\pi/2}^{\pi}$

C'est à dire $J=+\dfrac{\pi}{2n}\cos(\dfrac{n\pi}{2})+\dfrac{1}{n^2}\sin(\dfrac{n\pi}{2})$

Finalement $\boxed{b_n=\dfrac{4}{\pi n^2}\sin(\dfrac{n\pi}{2})}$

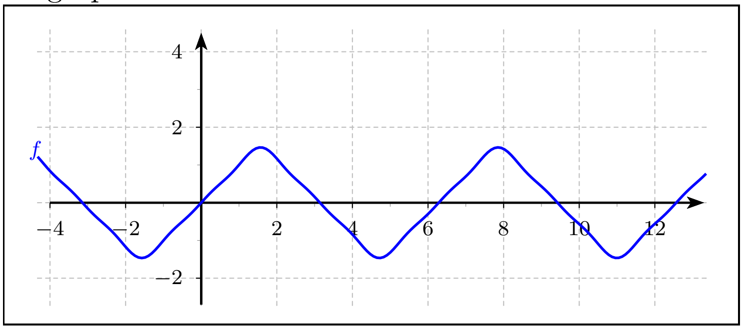
On considère $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Puisque tous les a sont nuls et que

n	1	2	3	4	5
$b(n)$	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{-4}{9\pi}$	0	$\frac{4}{25\pi}$

On peut écrire $\boxed{S_5(t) = \frac{4}{\pi} sin(t) - \frac{4}{9\pi}\sin(3t) + \frac{4}{25\pi}\sin(5t)}$

Le grapheur nous donne la courbe suivante :



Le carré de la valeur efficace de f est égal à : $V_{eff}^2 = \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t^2 dt \quad + \quad \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)^2 dt\right)$ car la fonction f^2 est paire.

donc $V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} \quad + \quad \left[-\frac{(\pi - t)^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)$

C'est à dire $V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24}\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{12}} \approx 0,8225$

Par ailleurs, la formule de Parseval appliquée à la série de Fourier tronquée à l'ordre 5 donne :

$W_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{81\pi^2} + \frac{16}{635\pi^2}\right) = \boxed{\frac{8}{\pi^2} \times \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625}\right)} \approx 0,8218$

Le rapport $\frac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,999$ ce qui signifie que $\boxed{S_5 \text{ est une très bonne approximation de } f}$ et cela justifie donc l'abandon des termes de rangs supérieurs à 5.