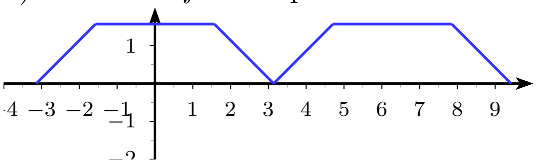
EXERCICE signal trapèze

On considère la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par $f(t)=\frac{\pi}{2}$ et sur $]\frac{\pi}{2};\pi]$ par $f(t)=\pi-t$

1) Dessin de f sur 2 périodes.



2) Coefficients a

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\times 2\times\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\ \mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{\pi}\pi-t\ \mathrm{d}t\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\times\left(\frac{\pi^2}{4}+\left[\pi t-\frac{t^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\times\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{3\pi^2}{8}\right)=\frac{1}{\pi}\times\frac{3\pi^2}{8}=\frac{3\pi}{8}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t$$

Puisque l'expression de $f(t)$ change suivant l'intervalle sur lequel on se trouve, on morcelle en deux

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos(nt)dt+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\cos(nt)dt\right)=\frac{2}{\pi}(I+J)$$

Intégrons I :

On obtient :

$$I=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Intégrons J par parties :

On pose $u(t)=\pi-t$ et $v'(t)=\cos(nt)$,

On calcule $u'(t)=-1$ et $v(t)=\frac{1}{n}\sin(nt)$,

On obtient : $J=\left[\frac{\pi-t}{n}\sin(nt)\right]_{\pi/2}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nt)dt$

Puis $J=0-\frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2})-\frac{1}{n^2}\left[\cos(nt)\right]_{\pi/2}^{\pi}$

C'est à dire $J=-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2})$

Finalement $a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2})\right)$

$$\boxed{a_n=-\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n+\cos\frac{n\pi}{2}\right)}$$

3) Les coefficients b_n pour $n\in\mathbb{N}^*$

Puisque le signal est paire, tous les b_n sont nuls.

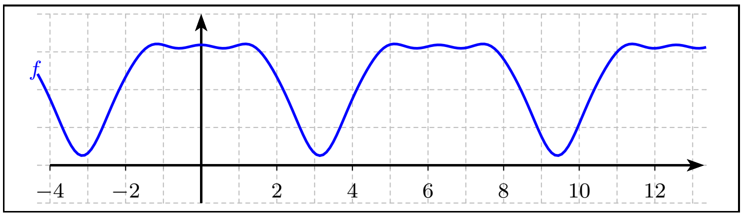
On considère $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Puisque tous les a sont nuls et que

n	0	1	2	3	4	5
$a(n)$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{-1}{\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	0	$\frac{2}{25\pi}$

On peut écrire $\boxed{S_5(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) + \frac{-1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t) + \frac{2}{25\pi}\cos(5t)}$

Le grapheur nous donne la courbe suivante :



Le carré de la valeur efficace de f est égal à : $V_{eff}^2 = \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 dt \quad + \quad \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)^2 dt\right)$

car la fonction f^2 est paire.

donc $V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{8} \quad + \quad \left[-\frac{(\pi - t)^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)$

C'est à dire $V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{24}\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{6}} \approx 1,645$

Par ailleurs, la formule de Parseval appliquée à la série de Fourier tronquée à l'ordre 5 donne :

$W_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2 = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{81\pi^2} + \frac{4}{625\pi^2}\right) \approx \boxed{1,644}$

Le rapport $\frac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,999$ ce qui signifie que $\boxed{S_5 \text{ est une très bonne approximation de } f}$ et cela justifie donc l'abandon des termes de rangs supérieurs à 5.