EXERCICE

On désigne par τ un réel appartenant à l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et par E une constante strictement positive.

On considère un signal périodique modélisé par la fonction f de période $T = 2\pi$, impaire, définie par :

$$\begin{cases} f(t) & = & 0 & \text{si} & t \in [0\ ;\ \tau] \\ f(t) & = & -E & \text{si} & t \in]\tau\ ;\ \pi - \tau[\\ f(t) & = & 0 & \text{si} & t \in [\pi - \tau\ ;\ \pi] \end{cases}$$

1. Construire, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de f sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f.

   Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} b_{2p} & = & 0 \\ b_{2p+1} & = & -\dfrac{4E}{\pi(2p+1)}\cos[(2p+1)\tau] \end{cases}$
3. Déterminer τ pour que la fonction u_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_3(t) = a_3\cos(3t) + b_3\sin(3t)$ soit nulle sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que la fonction satisfait aux conditions de Dirichlet.

   On note $S(t)$ la somme de la série de Fourier associée à f.

   Déterminer $S(0)$, $S(\tau)$ et $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
5. Dans cette question, on choisit $\tau = \dfrac{\pi}{6}$.
   (a) Calculer le carré de la valeur efficace sur une période de la fonction f, c'est-à-dire le nombre f_e^2 tel que $f_e^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Calculer $k = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

   Donner l'arrondi à 10^{-3} près du rapport $\dfrac{k}{f_e^2}$.