

EXERCICE

Partie A

1. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^\pi \sin t \cdot \cos t \, dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin t \cdot \cos(2t) \, dt = -\frac{2}{3}.$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2. On considère le signal, modélisé par la fonction réelle e , de période 2π , définie par :

$$\begin{cases} e(t) = \sin t & \text{si } t \in [0 ; \pi] \\ e(t) = 0 & \text{si } t \in]\pi ; 2\pi[. \end{cases}$$

(a) Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction e pour t variant dans l'intervalle $[-2\pi ; 4\pi]$.

(b) Calculer les coefficients de Fourier a_0 , a_1 et a_2 de la fonction e . On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients b_1 et b_2 valent : $b_1 = \frac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3. (a) Calculer le carré E^2 de la valeur efficace du signal e .

(b) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.

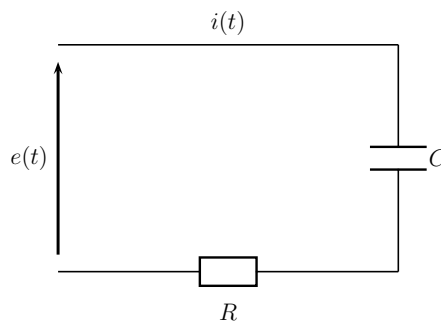
Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)$.

Calculer P , puis donner une approximation décimale à 10^{-3} près du rapport $\frac{P}{E^2}$.

La comparaison de E^2 et P justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.

Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée e défini dans la partie A.



L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour $t \in [0 ; +\infty[$,

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) \, du = e(t) \quad (1).$$

Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée e par son développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2. L'équation (1) devient alors :

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) \, du = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos(2t) \quad (2).$$

On admet que l'intensité t du courant est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que $R = 5000\Omega$ et $C = 10^{-4} \text{ F}$.

1. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = (10^{-4}) \cos t + \left(\frac{4}{15\pi} \cdot 10^{-3}\right) \sin(2t) \\ t \in [0 ; +\infty[\end{cases} \quad (3).$$

2. Vérifier que la fonction i_1 telle que $i_1(t) = (4 \cdot 10^{-5}) \cos t + (2 \cdot 10^{-5}) \sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = (10^{-4}) \cos t \\ t \in [0 ; +\infty[\end{cases}$$

3. Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = \left(\frac{4}{15\pi} \cdot 10^{-3}\right) \sin(2t) \\ t \in [0 ; +\infty[\end{cases}$$

4. Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.