EXERCICE

Partie A

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales : $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin n\dfrac{\pi}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $J_n = \dfrac{\pi}{2n}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{n^2}\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{n^2}$
3. Déterminer I_1, I_2 et I_3, puis J_1, J_2 et J_3.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que : $\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, & f(t) = \dfrac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ (on prendra $E = 2$ uniquement pour construire la courbe représentant f).
2. Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.
   (a) Calculer a_0.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de b_n.
   (c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
   Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

Partie C

1. Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3.
2. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a : $F^2 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t$
3. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne : $F^2 = a_0^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$
   Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$.
   Calculer P, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\dfrac{P}{F^2}$.
   Ce dernier résultat très proche de 1, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 3.