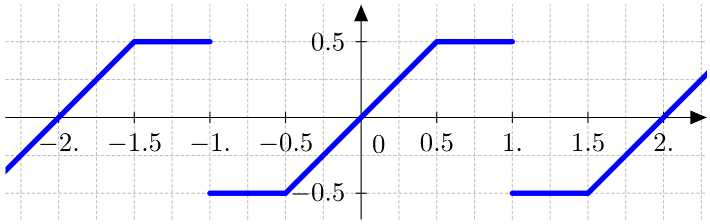
EXERCICE

On considère f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(t)|$

1. Dessin sur au moins deux périodes



2. Calculs de a_0, a_n, b_n

Puisque f est impaire, tous les a_n sont nuls et $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$$b_n = \frac{2}{2} \times 2 \times \int_0^1 f(t)\sin(nt)dt$$

$$b_n = 2 \times \left(\int_0^{1/2} f(t)\sin(n\pi t)dt + \int_{1/2}^1 f(t)\sin(n\pi t)dt \right)$$

$$b_n = 2 \times \left(\int_0^{1/2} t\sin(n\pi t)dt + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2}\sin(n\pi t)dt \right)$$

$$b_n = 2 \times \left(\int_0^{1/2} t\sin(n\pi t)dt + \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \sin(n\pi t)dt \right)$$

Intégrons par parties :

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(n\pi t)$

On calcule $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}$

On obtient : $b_n = 2\times\left(\left[\dfrac{-t\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^{1/2} - \dfrac{-1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{1/2} \cos(n\pi t)dt + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_{1/2}^1 \right)$

$$b_n = 2 \times \left(\frac{-\frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} - 0 \quad + \frac{+1}{n^2\pi^2}[\sin(n\pi t)]_0^{1/2} - \frac{1}{2n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$b_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) \quad + \frac{1}{n^2\pi^2}(\sin(\frac{n\pi}{2} - 0)) - \frac{1}{2n\pi}\left((-1)^n - \cos(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$b_n = 2 \times \left(\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) - \frac{1}{2n\pi}(-1)^n \right)$$

$$b_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) - \frac{1}{n\pi}(-1)^n$$

Calculons les premiers coefficients :

si $n = 1$ alors $b_1 = \dfrac{2}{\pi^2} + \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2+\pi}{\pi^2}$

si $n = 2$ alors $b_2 = 0 - \dfrac{1}{2\pi} = -\dfrac{1}{2\pi}$

si $n = 3$ alors $b_3 = -\dfrac{2}{9\pi^2} + \dfrac{1}{3\pi} = \dfrac{-2+3\pi}{\pi^2}$

Le signal S_3 est alors égal à $S_3(t) = \dfrac{2+\pi}{\pi^2}\sin(\pi t) - \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi t) + \dfrac{-2+3\pi}{\pi^2}\sin(3\pi t)$