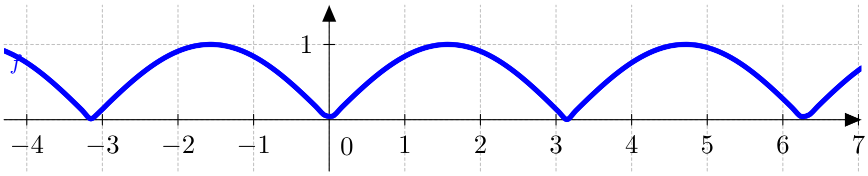
EXERCICE

On considère f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(t)|$

1. Dessin sur au moins deux périodes



2. Montrer que f est paire et 2π-périodique.

   On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = |\sin(-t)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)| = f(t)$ donc f est une fonction paire.

   On a aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t + 2\pi) = |\sin(t + 2\pi)| = |\sin(t)| = f(t)$ donc f est 2π-périodique.

3. Calculer a_0 et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   Puisque f est paire, tous les b_n sont nuls

   $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_0^{\pi} |sin(t)|dt = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)dt = \dfrac{1}{\pi} \times [-\cos(t)]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$

4. On rappelle que $\sin(A)\cos(B) = \dfrac{1}{2}(\sin(A-B)+\sin(A+B))$. En déduire le a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Attention à a_1

   $a_n = \dfrac{2}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(t)|\cos(nt)dt$

   $a_n = \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)dt$

   $a_n = \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{1}{2}\Big(\sin(t-nt) + \sin(t+nt)\Big)dt$

   $a_n = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t-nt) + \sin(t+nt)dt$

   Si $\boxed{n \neq 1}$

   $a_n = \dfrac{1}{\pi} \times \left[\dfrac{-\cos(t-nt)}{1-n} + \dfrac{-\cos(t+nt)}{1+n}\right]_0^{\pi}$

   $a_n = \dfrac{1}{\pi} \times \left(\dfrac{-\cos(\pi-n\pi)+1}{1-n} + \dfrac{-\cos(\pi+n\pi)+1}{1+n}\right)$

   $a_n = \dfrac{1}{\pi}\times\left(\dfrac{-\cos(\pi)\cos(n\pi)-\sin(\pi)\sin(n\pi)+1}{1-n} + \dfrac{-\cos(\pi+n\pi)\cos(\pi)+\sin(\pi)\sin(n\pi)+1}{1+n}\right)$

   $a_n = \dfrac{1}{\pi} \times \left(\dfrac{+(-1)^n+1}{1-n} + \dfrac{+(-1)^n+1}{1+n}\right)$

   $a_n = \dfrac{1}{\pi} \times \left(\dfrac{(-1)^n+1+n(-1)^n+n}{1-n^2} + \dfrac{(-1)^n+1-n(-1)^n-n}{1-n^2}\right)$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{(-1)^n + 1 + n(-1)^n + n + (-1)^n + 1 - n(-1)^n - n}{1-n^2}$

$a_n = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{(-1)^n + 1}{1-n^2}$

Si $\boxed{n=1}$

$a_1 = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)dt$

$a_1 = \dfrac{1}{\pi} \times \left[\dfrac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi}$

$a_1 = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{-\cos(2\pi)+1}{2} = 0$

5. On rappelle que $\cos^2 A - \sin^2 A = \cos(2A)$ et $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$. En déduire V_{eff}^2

   On a donc $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)dt$

   $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)dt$

   or $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ donc $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{1-\cos(2t)}{2}dt$

   $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times \displaystyle\int_0^{\pi} 1 - \cos(2t)dt$

   $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times \left[t - \dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}$

   $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times \pi = \dfrac{1}{2}$

6. On souhaite approximer f par S_3. est-ce judicieux ?

   On utilisera $W_{eff}^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{3}(a_n^2 + b_n^2)$

   On a trouvé $a_0 = \dfrac{2}{\pi}$

   et $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{-4}{3\pi}$ et $a_3 = 0$

   $W_{eff}^2 = \dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{1}{2} \times (0 + \dfrac{16}{9\pi^2} + 0) \approx 0,495$

   Le rapport $\dfrac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,99$ donc oui S_3 est déjà une très bonne approximation de f