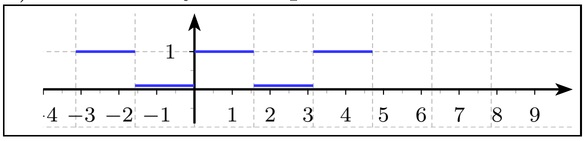
EXERCICE signal carré

On considère la fonction, 2π-périodique, définie sur $[0;\pi[$ par $f(t)=1$ et sur $[\pi;2\pi[]$ par $f(t)=0$

1) Dessin de f sur 2 périodes.



2) Coefficients a_0 et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^\pi f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^\pi 1\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \times \left(\int_0^\pi 1 \cos(nt)\ \mathrm{d}t + 0 \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi + 0 \right) = \frac{1}{2\pi}(0-0+0) = 0$$

3) Les coefficients b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \times \left(\int_0^\pi 1 \sin(nt)\ \mathrm{d}t + 0 \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + 0 \right) = \frac{-1}{n\pi}(-(-1)^n + 1) = \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

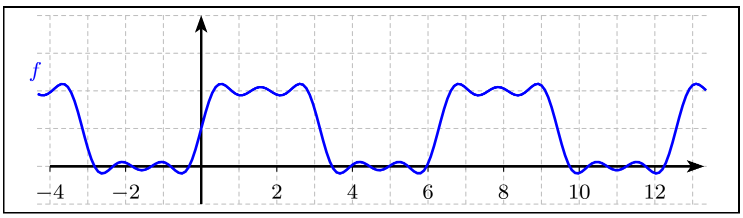
On considère $S_5(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Puisque tous les a sont nuls pour $n > 0$ et que

n	1	2	3	4	5
$b(n)$	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$

On peut écrire $\boxed{S_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) \right)}$

Le grapheur nous donne la courbe suivante :



Le carré de la valeur efficace de f est égal à : $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} 1^2 dt \quad + \quad 0\right)$ car la fonction f^2 est paire.

donc $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times \pi$

Remarque : f et f^2 ont exactement le même graphe donc l'intégrale de f et celle de f^2 sont les mêmes.

Par ailleurs, la formule de Parseval appliquée à la série de Fourier tronquée à l'ordre 5 donne :
$W_{eff}^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{4}{9\pi^2} + \dfrac{4}{25\pi^2}\right) = \boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{\pi^2} \times \left(1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{25}\right)} \approx 0,483$

Le rapport $\dfrac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,967$ ce qui signifie que $\boxed{S_5 \text{ est une assez bonne approximation de } f}$ et cela justifie donc l'abandon des termes de rangs supérieurs à 5.