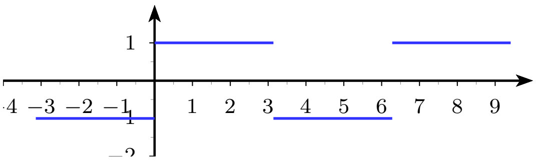
# EXERCICE signal carré

On considère la fonction impaire, $2\pi$-périodique, définie sur $]0;\pi[$ par $f(t) = 1$ et $f(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

1) Dessin de $f$ sur 2 périodes au moins.



2) Calculer les coefficients $a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Puisque $f$ est impaire, tous les $a_n$ sont nuls. Y compris le terme $a_0$

3) Calculer les coefficients $b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Puisque $f$ est impaire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = \frac{2}{2\pi} \times 2 \times \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt$

C'est à dire $b_n = \frac{2}{\pi} \times \int_0^\pi 1\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi} \times \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$

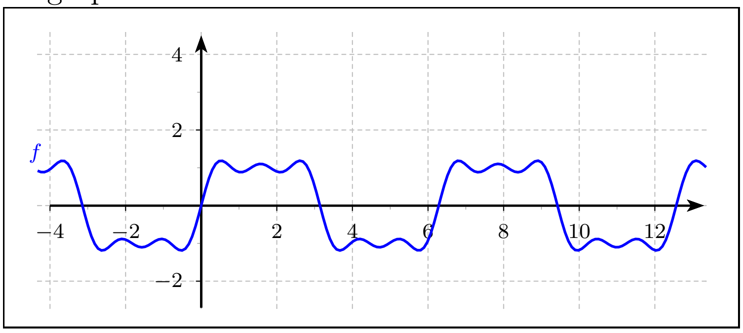
4) Donner une écriture simplifiée de $S_5(t) = \sum_{n=0}^{5} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$

Puisque tous les $a$ sont nuls et que

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b(n)$ | $\frac{4}{\pi}$ | 0 | $\frac{4}{3\pi}$ | 0 | $\frac{4}{5\pi}$ |

On peut écrire $\boxed{S_5(t) = \frac{4}{\pi}sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t)}$

Le grapheur nous donne la courbe suivante :



5) Calculer la carré de la valeur efficace de $f$, noté : $V_{eff}^2$ et le comparer au carré de la valeur efficace de $S_5$ en utilisant la formule de Parseval et en considérant que $a_n = b_n = 0$ pour $n > 5$. Justifier alors l'abandon des harmoniques de rangs élevés pour émuler $f$

La fonction $f^2$ est paire donc le carré de la valeur efficace de $f$ est égal à : $V_{eff}^2 = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 1^2 dt$
donc $V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \pi = 1$

Par ailleurs, la formule de Parseval appliquée à la série de Fourier tronquée à l'ordre 5 donne :
$$W_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{9\pi^2} + \frac{16}{25\pi^2}\right) = \boxed{\frac{8}{\pi^2} \times \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\right)} \approx 0,933$$

Le rapport $\dfrac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2} \approx 0,933$ ce qui signifie que $\boxed{S_5 \text{ est une assez bonne approximation de } f}$ et cela peut donc justifier l'abandon des termes de rangs supérieurs à 5. Remarque : si on ajoute le terme suivant, on arrive à presque à 0,95.