TD - Séries de Fourier

Amphi A TD 2

Exercice 1

Calculez les coefficients de Fourier (exponentiels et trigonométriques) de $f : x \mapsto 2e^{-3ix} + 3e^{2017ix}$ et $g : x \mapsto \cos(x)^3 - 2\sin(2x)$.

Exercice 2

Soit f une fonction 2π periodique. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier exponentiels, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ ses coefficients de Fourier trigonométriques.

1. Montrez que si f est paire, alors $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que si f est impaire, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Que dire des coefficients exponentiels dans chacun de ces deux cas, si l'on suppose en plus que f est à valeurs réelles?

3. On suppose que f est $2\pi/N$ périodique, pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$n \not\equiv 0 \bmod N \Longrightarrow c_n = 0$$

4. On suppose f continue. Montrez la réciproque des questions 1 et 3.

Correction.

1. Supposons que f soit paire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est donc impaire, d'où

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

De même, si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire, donc son intégrale entre $-\pi$ et π est nulle. Donc $a_n(f) = 0$.

2. On a les formules (à connaître ou à savoir retrouver rapidement) pour tout $n \geq 1$

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$$
$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$$

et $c_0(f) = 2a_0(f)$. Si f est à valeurs réelles, ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels. Donc si f est paire alors ses coefficients de Fourier exponentiels sont réels. Si f est impaire, ses coefficients de Fourier exponentiels sont imaginaires purs et $c_0(f) = 0$.

3. Soit

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-nit}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-nit}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{2k\pi/N}^{2(k+1)\pi/N} f(t)e^{-nit}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{2\pi/N} f\left(t+\frac{2k\pi}{N}\right)\exp\left(-ni\left(t+\frac{2k\pi}{N}\right)\right)dt \qquad \text{(par changement de variable)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{2\pi/N} f(t)\exp\left(-ni\left(t+\frac{2k\pi}{N}\right)\right)dt \qquad \text{(par periodicité de } f\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/N} f(t)\exp(-nit)\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2kn\pi}{N}i\right)dt
\end{aligned}$$

Maintenant, si $n \not\equiv 0 \mod N$ alors $e^{-i2n\pi/N} \neq 1$. En appliquant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2kn\pi}{N}i\right) = \frac{1-e^{-2niN\pi/N}}{1-e^{-2ni\pi/N}} = 0$$

D'où $c_n(f) = 0$.

4. Non faisable avec les outils vus en cours.

Exercice 3

Déterminez les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle

$$y''(x) + e^{ix}y(x) = 0$$

Correction.

Analyse. Soit f une solution 2π-périodique de l'équation. On a donc $f''(x) = -e^{ix}f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par une récurrence immédiate, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a donc pour $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f'') = inc_n(f') = -n^2c_n(f)$$

f'' et $h : x \mapsto -e^{ix}f(x)$ sont égales: elles ont donc les même coefficients de Fourier. Calculons

$$c_n(h) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{it-nit}dt = -c_{n-1}(f)$$

$c_n(f'') = c_n(h)$ donc

$$n^2c_n(f) = c_{n-1}(f)$$

On a donc $c_{-1}(f) = 0^2c_0(f) = 0$. Puis $c_{-2}(f) = (-1)^2c_{-1}(f) = 0$ et plus généralement pour $n \geq 1$

$$c_{-n}(f) = 0$$

Pour $n \geq 1$, on a par récurrence immédiate

$$c_n(f) = \frac{1}{n^2}c_{n-1} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}c_{n-1}(f) = \cdots = \frac{1}{(n!)^2}c_0(f)$$

On note $a = c_0(f) \in \mathbb{C}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue), sa série de Fourier converge normalement donc simplement vers elle sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}e^{inx}$$

Synthèse. Réciproquement si f est de la forme

$$x \mapsto a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}e^{inx}$$

pour un $a \in \mathbb{C}$. Toutes les séries dérivées de la série ci-dessus convergent normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, f est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}(in)^2e^{inx} = -a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{((n-1)!)^2}e^{inx} = -a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}e^{i(n+1)x} = -e^{ix}f(x)$$

f est donc une solution 2π periodique de l'équation différentielle.

Conclusion: L'ensemble des solutions 2π périodiques de l'équation différentielle est donc

$$\left\{x \mapsto a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}e^{inx} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}\right\}$$

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt\right| \leq 2^{-|n|}$. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 5: Signal en dents de scie.

On considère la fonction f, 2π-périodique définie par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall t \in]0,2\pi[,\ f(t) = \pi - t \end{cases}$

1. Calculez les coefficients de Fourier exponentiels de f. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2. Écrire la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f.

3. Montrez que pour tout $x \in]0,2\pi[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$

4. Montrez que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. On considère F, la primitive de f nulle en 0. Montrez que F est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

6. Calculez les coefficients de Fourier de F.

7. Montrez que $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Correction.

1. On trouve pour $c_0(f) = 0$ et pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$c_n(f) = \frac{-i}{n}$$

Donc $a_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$\begin{cases} a_n(f) & = c_n(f) + c_{-n}(f) = 0 \\ b_n(f) & = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{n} \end{cases}$$

2. On écrit alors, à l'aide des coefficients de Fourier les sommes partielles: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(t) = \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-n}}^{n} \frac{-i}{k} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \sin(kt)$$

3. On applique le théorème de Dirichlet en $t \in]0,2\pi[$ à f qui est bien $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue en t:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \sin(kt)$$

or $f(t) = \pi - t$ par définition, d'où le résultat.

4. On applique le théorème de Parseval à f (qui est vrai pour les fonctions continues par morceaux, même si le cours ne le donne que pour les fonctions $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux):

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

ce qui donne (après calcul de l'intégrale de droite) le résultat.

5. F est une primitive d'une fonction continue par morceaux, elle est donc continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = F(x)$$

F est donc 2π-périodique.

6. F est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par le théorème du cours: $c_n(f) = inc_n(F)$ donc pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(F) = \frac{1}{n^2}$. Il reste à calculer $c_0(F)$. On calcule, par intégration par parties (F est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux)

$$\begin{aligned}
c_0(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)dt = \frac{1}{2\pi}\big[tF(t)\big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tf(t)dt \\
&= F(2\pi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi t - t^2)dt \\
&= F(0) - \frac{1}{2\pi}\left[\pi\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

On en déduit les coefficients trigonométriques: $a_0(F) = 2c_0(F) = \frac{2\pi^2}{3}$ et pour $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n(F) &= c_n(F) + c_{-n}(F) = \frac{2}{n^2} \\ b_n(F) &= i(c_n(F) - c_{-n}(F)) = 0 \end{cases}$$

7. On applique le théorème de Parseval à F (qui est bien continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux comme dans le théorème du cours).

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(F)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)^2 dt$$

La somme de gauche vaut

$$\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

Pour calculer l'intégrale de doite, on commence par calculer F. Pour $x \in [0, 2\pi]$

$$F(x) = \int_0^x (\pi - t)dt = \pi x - \frac{x^2}{2}$$

Donc $F(x)^2 = \pi^2 x^2 - \pi x^3 + \frac{x^4}{4}$. On peut donc calculer

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2\frac{t^3}{3} - \pi\frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{20}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{8\pi^5}{3} - \frac{16\pi^5}{4} + \frac{32\pi^5}{20}\right) = \frac{4\pi^4}{3} - 2\pi^4 + \frac{4\pi^4}{5} \\
&= \frac{2\pi^4}{15}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{15}$$

donc finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 6: Signal triangulaire.

En considérant la fonction f, 2π-périodique définie par $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = \pi - 2|t|$, montrez (en vous inspirant de l'exercice 5)

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 7: Théorème de Fejer.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue, 2π-périodique. On note $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f. On rappelle que le noyau de Dirichlet est défini par $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{kix}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et que pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ on a $D_n(x) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$. On rappelle que l'on a alors $S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt$.
On défini pour $n \geq 1$

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)dt$$

où $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$ est le noyau de Fejer.

1. Montrez que K_n vérifie les propriétés suivantes:

(i) pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(x) = \dfrac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})}$.

(ii) K_n est 2π-périodique, paire, positive.

(iii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n = 1$.

(iv) $\forall \epsilon \in]0,\pi[$, $\displaystyle\int_{\epsilon}^{\pi} K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Montrez que $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8: Phénomène de Gibbs.

On reprend la fonction f de l'exercice 5. On note $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier.

1. Montrez que $S_n(f)\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}dx$.

2. On donne $2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}dx \simeq 3.7$. Interprétez.

Correction.

1. On a calculé à l'exercice 5 que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(f)(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$$

On a donc

$$S_n(f)\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{k} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}$$

On reconnaît une somme de Riemann approximant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}dx$. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est bien un fonction continue sur $]0,1]$ que l'on peut prolonger en une fonction continue sur $[0,1]$ car $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
On a donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

D'où $S_n(f)\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}dx$.

2. On a $\sup|f| = \pi \simeq 3.14$. Par contre, vu la question précédente $\sup|S_n(f)|$ ne peut pas tendre vers $\sup|f|$ car $\sup|S_n(f)| \geq S_n(f)(\pi/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 3.7\ldots$.

$S_n(f)$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. La courbe de $S_n(f)$ présente même des "pics" qui se situent à plus de $\simeq 3.7 - 3.14 \simeq 0.5$ au dessus de la courbe de f, lorsque n est grand. (Faire un dessin).

Exercice 9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouvez toutes les fonctions f 2π-périodiques, dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(t+\lambda) \tag{1}$$

Correction.

Analyse. Soit f une solution 2π périodique de (1). f est alors par une récurrence immédiate de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après (1), les coefficients de Fourier de f' sont les mêmes que ceux de $h : t \mapsto f(\lambda + t)$. On a d'une part, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

On calcule d'autre part

$$\begin{aligned} c_n(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\lambda)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\lambda^{2\pi+\lambda} f(t)e^{-int+ni\lambda}dt \qquad \text{(par changement de variable)} \\ &= e^{ni\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_\lambda^{2\pi+\lambda} f(t)e^{-int}dt \\ &= e^{ni\lambda}c_n(f) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$inc_n(f) = c_n(f') = c_n(h) = e^{i\lambda n}c_n(f)$$

On passe cette égalité au module:

$$|n||c_n(f)| = |c_n(f)| \quad \text{et donc} \quad (|n|-1)|c_n(f)| = 0$$

Donc si $n \notin \{-1, 1\}$, $c_n(f) = 0$. Pour $n = 1$ on a

$$ic_1(f) = e^{i\lambda}c_1(f) \quad \text{et donc} \quad (i - e^{i\lambda})c_1(f) = 0$$

de même $(i + e^{-i\lambda})c_{-1}(f) = 0$. On va donc distinguer 2 cas.

Cas 1: $\lambda \not\equiv \frac{\pi}{2}$ modulo 2π
Alors $c_1(f) = c_{-1}(f) = 0$. **Donc** f **est nulle** car sa série de Fourier est nulle et converge vers f en tout point par le théorème de Dirichlet (f est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

Cas 2: $\lambda \equiv \frac{\pi}{2}$ modulo 2π
Alors comme f est somme de sa série de Fourier (par Dirichlet), si on pose $\alpha = c_1(f)$ et $\beta = c_{-1}(f)$ on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}$$

Synthèse.
Cas 1: $\lambda \not\equiv \frac{\pi}{2}$ modulo 2π
Dans ce cas la fonction nulle est bien solution.
Cas 2: $\lambda \equiv \frac{\pi}{2}$ modulo 2π
Dans ce cas $e^{i\lambda} = i$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}$$

on a donc, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \alpha i e^{ix} - \beta i e^{-ix} = \alpha e^{i\lambda}e^{ix} + \beta e^{-i\lambda}e^{-ix} = f(x+\lambda)$$

f est donc bien solution du problème.
Conclusion:
Si $\lambda \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, alors l'ensemble des solutions est

$$\left\{x \mapsto \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$$

Sinon, c'est $\{x \mapsto 0\}$.

Exercice 10: $(*)$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de moyenne nulle. Montrez que $f'' + f$ admet au moins 4 zéros sur $[0, 2\pi[$