PROBLEME 4 : AUTOMATIQUE (20 points)

Soit un système d'entrée u(t) et de sortie y(t) représenté par l'équation différentielle suivante :

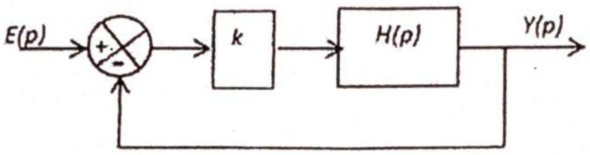
$$10\dddot{y}(t) + 17\ddot{y}(t) + y(t) = 4u(t)$$

1. Déterminer la transformée de Laplace du système puis donner sa fonction de transfert (les conditions initiales sont nulles)

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)}$$

2. On donne : $H(P) = \frac{4}{(1+P)(1+2P)(1+5P)}$

Le système est mis dans une boucle de régulation avec une correction proportionnelle donné par la représentation suivante :



2.1. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée T(p).

2.2. En utilisant le critère de Routh, déterminer la condition de stabilité sur k.

2.3. Quel est la valeur du gain critique kc qui permet d'avoir la limite de stabilité ?

3. Étude harmonique du système en boucle ouverte avec k=1

3.1. Cette étude nous a permis de remplir le tableau suivant :

ω(rad/s)	0,01	0,03	0,1	0,2	0,3	0,6	0,9	2
$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB}$	12	11,9	10,9	8,2	5,2	-3,2	-10	-27
$arg(H(j\omega))$	-4,5	-13,7	-43,6	-78	-104	-153	-180	-223,7

3.2. Représenter le système dans le diagramme de Bode (document réponse page 7/7), déterminer la marge de gain et la marge de phase puis en déduire la stabilité du système en boucle fermée.

1)

$10\dddot{y}(t) + 17\ddot{y}(t) + y(t) = 4u(t)$

La Trasformé de la laplace.

Soit $\mathcal{L}[y(t)] = YP$ et $\mathcal{L}[u(t)] = U(P)$

$\mathcal{L}[10\dddot{y}(t) + 17\ddot{y}(t) + y(t)] = \mathcal{L}[4u(t)]$

$10\mathcal{L}[\dddot{y}(t)] + 17\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = 4\mathcal{L}[u(t)]$

$*\ 10P^3Y(P) + 17P^2Y(P) + Y(P) = 4U(P)$

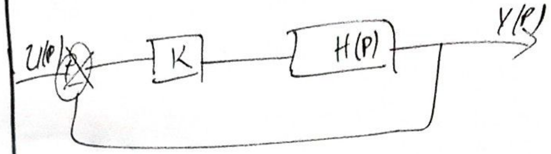
$H(P) = \frac{YP}{U(P)}$

$*\ Y(P)[10P^3 + 17P^2 + 1] = 4U(P)$

$\Rightarrow Y(P) = \frac{4U(P)}{10P^3 + 17P^2 + 1}$

$$\boxed{H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{4}{10P^3 + 17P + 1}}$$

On donne $H(P) = \frac{4}{(1+P)(1+2P)(1+5P)}$



FTBF

$T(P) = \frac{K\,H(P)}{1 + KH(P)}$

$= \dfrac{\frac{4K}{(1+P)(1+2P)(1+5P)}}{1 + \frac{4K}{(1+P)(1+2P)(1+5P)}}$

$= \frac{4K}{(1+P)(1+2P)(1+5P)} \times \frac{(1+P)(1+2P)(1+5P)}{(1+P)(1+2P)(1+5P) + 4K}$

$T(P) = \frac{4K}{(1+P)(1+2P)(1+5P) + 4K}$

Posons $T(P) = \frac{S(P)}{D(P)}$

$D(P) = (1+P)(1+2P)(1+5P) + 4K$

$= (1 + 2P + P + 2P^2)(1+5P) + 4K$

$= 1 + 5P + 2P + 10P^2 + P + 5P^2 + 2P^2 + 10P^3 + K4$

$D(P) = 10P^3 + 17P^2 + 8P + 4K + 1$

P^3	10	8
P^2	17	$4K+1$
P^1	$\frac{126-40K}{17}$	0
P^0	$4K+1$	0

$\frac{126-40K}{17} > 0$

$126 - 40K > 0$

$40K < 126$

$K < \frac{126}{40}$

$K < 3{,}15$

$4K + 1 > 0$

$K > -\frac{1}{4}$

$K > -0{,}25$

Le Système est stable pour $K \in]-0{,}25 \,;\, 3{,}15[$

on a : $-0{,}25 < K < 3{,}15$

donc $\boxed{K_c = 3{,}15}$

4ème PARTIE : AUTOMATIQUE

Un arbre de transmission est entraîné par un moteur à combustion interne. On désire contrôler la vitesse de rotation de l'arbre par l'ouverture de la valve du moteur à combustion interne. On note $n(t)$ la vitesse de rotation de l'arbre et par $\theta(t)$ l'ouverture de la valve. Les essais ont permis de déterminer la relation

$$T(p) = \frac{\Theta(p)}{N(p)} = \frac{1}{0{,}01p^2 + 0{,}11p + 0{,}1}$$

$N(p)$ et $\Theta(p)$ sont respectivement les transformées de LAPLACE de $n(t)$ et $\theta(t)$.

On insère le système dans une boucle à retour unitaire

1. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système F(p).

2. Étudier :

   2.1 la stabilité du système en boucle fermée ;

   2.2 la précision du système quand le signal à l'entrée est un échelon ;

   2.3 le temps de réponse ($t_{r5\,\%}$) du système en boucle fermée.

3. On corrige de système en insérant dans la boucle une commande PID de fonction de transfert

$$C(p) = 5 + 0{,}3p + \frac{33{,}33}{p}$$

3.1 Représenter le diagramme fonctionnel du système ainsi obtenu.

3.2 Déterminer :

a) la fonction de transfert en boucle ouverte du système ;

b) la fonction de transfert en boucle fermée du système.

3.3 Étudier la stabilité du système corrigé.

****

1) $F(P) = \dfrac{T(P)}{1+T(P)}$

$$= \frac{\dfrac{1}{0{,}01P^2+0{,}11P+0{,}1}}{1+\dfrac{1}{0{,}01P^2+0{,}11P+0{,}1}}$$

$$\boxed{F(P) = \frac{1}{0{,}01P^2+0{,}11P+1{,}1}}$$

$$F(P) = \frac{100}{P^2+11P+110}$$

$D(P) = P^2+11P+110$

Les Coeficient du Polynomes Caracteristique sont tous positif Donc le systeme est stable.

2/ Calculons $\mathcal{E}(P)$ pour E est un échelon.

$\mathcal{E}(P) = E(P)\left[1-F(P)\right]$

$\mathcal{E}(P) = \dfrac{1}{P}\left(1-\dfrac{100}{P^2+11P+110}\right)$

$\lim\limits_{P\to 0} P\,\mathcal{E}(P) = 0{,}09$

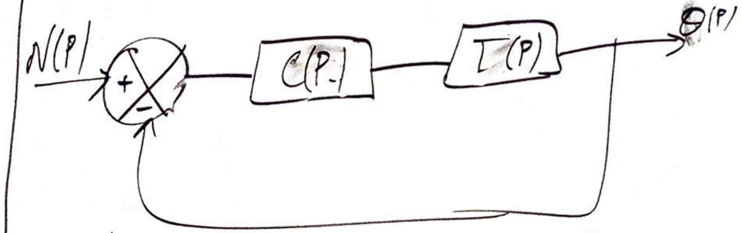
3) $tr_{5\%}$

on a D(P) de la forme $P^2+2mW_nP+W_n^2$

$tr5\% = \dfrac{3}{mW_n} = \dfrac{6}{2mW_n}$ Par identification

$2mW_n = 11$

$tr5\% = \dfrac{6}{11} = 0{,}54\,s$



3.2.a) FTBO

$G(P) = C(P).T(P)$

$$= \left(5+0{,}3P+\frac{33{,}33}{P}\right)\left(\frac{100}{P^2+11P+110}\right)$$

$$= \frac{5P+0{,}3P^2+33{,}33}{P} \times \frac{100}{P^2+11P+110}$$

$$\boxed{G(P) = \frac{30P^2+500P+3333}{P(P^2+11P+110)}}$$

3.2.b) FTBF

$H(P) = \dfrac{G(P)}{1+G(P)}$

$$= \frac{\dfrac{30P^2+500P+3333}{P(P^2+11P+110)}}{1+\dfrac{30P^2+500P+3333}{P(P^2+11P+110)}}$$

$$= \frac{30P^2+500P+3333}{(30P^2+500P+3333)+P(P^2+11P+110)}$$

$$\boxed{H(P) = \frac{30P^2+500P+3333}{P^3+41P^2+610P+3333}}$$

3.4) La stabilité:

P^3	1	610
P^2	41	3333
P^1	528,71	0
P^0	3333	0

Aucun changement de signe dans la colonne des pivots donc système stable.