Exercices - Déterminants : corrigé

Petits calculs

Exercice 1 - - *L1/Math Sup* - ⋆

On ne change pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres. On ajoute donc à la troisième ligne 10 fois la seconde et 100 fois la première. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{vmatrix}.$$

Maintenant, tous les éléments de la dernière ligne sont divisibles par 13, et le déterminant vaut :

$$13 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 42 & 21 & 13 \end{vmatrix}.$$

C'est bien un entier divisible par 13 !

Exercice 2 - - *L1/Math Sup* - ⋆

On somme tout sur la première ligne. On obtient une ligne composée de $1+a+b+c$ qu'on peut extraire du déterminant. On retire ensuite b fois la première ligne à la seconde, et c fois la première ligne à la troisième. Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1.

Exercice 3 - **Sous forme factorisée** - *L1/Math Sup* - ⋆

On commence par faire apparaitre des 0 sur la première colonne, puis on transforme la troisième colonne en utilisant la formule

$$\cos 2b - \cos 2a = 2\cos^2 b - 2\cos^2 a.$$

On trouve successivement :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2\cos^2 b - 2\cos^2 a \\ 0 & \cos c - \cos a & 2\cos^2 c - 2\cos^2 a \end{vmatrix}.$$

On obtient alors, en utilisant que $\cos b - \cos a$ (resp. $\cos c - \cos a$) est un facteur commun de la deuxième (resp. troisième) ligne :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ 0 & \cos c - \cos a & 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{vmatrix} \\ &= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 1 & 2(\cos c + \cos a) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On fait apparaitre un dernier zéro, puis on développe le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 0 & 2(\cos c - \cos b) \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

Grands calculs

Exercice 4 - Déterminant de Vandermonde - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - ⋆⋆

Nous allons procéder par récurrence sur n. On commence par remarquer que, pour $n=2$, on a $V(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2-\alpha_1$. Nous allons donc prouver que :

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j-\alpha_i).$$

Cette formule est vraie pour $n=2$, et supposons là vraie au rang $n-1$. Si deux des α_i sont égaux, la formule est trivialement vraie, les deux termes étant égaux à 0. On suppose donc que les α_i sont tous distincts, et on considère $P(x)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},x)$. Le développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne prouve que P est un polynôme de degré exactement $n-1$, et de coefficient dominant $V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$. Or, si $x=\alpha_i$, avec $i\leq n-1$, le déterminant possède deux colonnes identiques et est donc nul. Ces valeurs sont donc les racines de P (il y en a exactement $n-1$), et P se factorise sous la forme :

$$P(x)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n-1}).$$

Il suffit de choisir $x=\alpha_n$ pour obtenir le résultat.

Exercice 5 - Fonction affine - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de $A(x)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i,1}+x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que
$$\det(A(x))=\sum_{i=1}^n(-1)^i(a_{i,1}+x)\det(A_i)$$
où A_i est une matrice à coefficients réels. D'où le résultat.
2. Soit $D(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à chacun des coefficients. D'après la question précédente, on sait que $D(x)=ax+b$ pour des réels a et b. De plus, $D(-a)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont α_i-a. D'où
$$D(-a)=\prod_{i=1}^n(\alpha_i-a).$$
De même, on a
$$D(-b)=\prod_{i=1}^n(\alpha_i-b).$$
a et c se déduisent alors facilement par la résolution d'un système 2×2 :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a&=&\frac{D(-b)-D(-a)}{a-b}\\ b&=&\frac{aD(-b)-bD(-a)}{a-b}. \end{array}\right.$$

Exercice 6 - Imbriqué... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Notons $D(s_1,\dots,s_n)$ ce déterminant. Prouvons par récurrence sur n que

$$D(s_1,\dots,s_n)=s_1(s_2-s_1)(s_3-s_2)\dots(s_n-s_{n-1}).$$

On vérifie cette relation facilement pour les premières valeurs de n. Si la propriété est vraie au rang $n-1$, prouvons la au rang n en retranchant la première colonne à toutes les autres. On trouve

$$D(s_1,\dots,s_n)=\begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0\\ s_1 & s_2-s_1 & \dots & s_2-s_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1 & s_2-s_1 & \dots & s_n-s_1\end{vmatrix}=s_1\begin{vmatrix} s_2-s_1 & \dots & \dots & s_2-s_1\\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & \dots & s_3-s_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & \dots & s_n-s_1\end{vmatrix}.$$

On en déduit que

$$D(s_1,\dots,s_n)=s_1D(s_2-s_1,s_3-s_1,\dots,s_n-s_1).$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} D(s_1,\dots,s_n) &= s_1(s_2-s_1)(s_3-s_1-s_2+s_1)\dots(s_n-s_1-s_{n-1}+s_1)\\ &= s_1(s_2-s_1)(s_3-s_2)\dots(s_n-s_{n-1}). \end{aligned}$$

Exercice 7 - Déterminant tridiagonal - *L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆

On note $\Delta_n(x)$ le déterminant recherché. On remarque, en écrivant la formule qui donne la définition du déterminant, que $\Delta_n(x)$ est un polynôme de degré exactement égal à $2n$. De plus, le terme en x^{2n} ne peut s'obtenir qu'en faisant le produit des termes diagonaux. On en déduit que le coefficient devant x^{2n} est égal à 1. Calculons ensuite $\Delta_n(x)$ en effectuant un développement suivant la première ligne. On trouve

$$\Delta_n(x)=(1+x^2)\Delta_{n-1}(x)+x\begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & & \\ 0 & 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0\\ \vdots & -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots\\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ & \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On continue en effectuant un développement suivant la deuxième colonne du déterminant restant. On trouve

$$\Delta_n(x)=(1+x^2)\Delta_{n-1}(x)-x^2\Delta_{n-2}(x).$$

Pour trouver vraiment la valeur de $\Delta_n(x)$, on calcule les premières itérations. On a

$$\Delta_1(x)=1+x^2,\ \Delta_2(x)=1+x^2+x^4,\dots$$

On conjecture que $\Delta_n(x)=1+x^2+\dots+x^{2n}$. Démontrons ceci par récurrence double. La propriété est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$. Si elle est vraie simultanément aux rangs $n-2$ et $n-1$, la formule de récurrence précédente montre qu'elle est aussi vraie au rang n. On obtient donc $\Delta_n(x)=1+x^2+\dots+x^{2n}$.

Exercice 8 - Tridiagonal - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On développe le déterminant par rapport à la première colonne. On trouve :
$$\Delta_{n+2}=a\Delta_{n+1}-c\begin{vmatrix} b & 0 & \dots & & \\ c & a & b & 0 & \dots \\ 0 & c & a & b & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}.$$
On développe encore le second déterminant par rapport à la première ligne, et on trouve le résultat demandé :
$$\Delta_{n+2}=a\Delta_{n+1}-bc\Delta_n.$$
2. On va procéder par récurrence **double**. Précisément, on va prouver par récurrence sur $n\geq 1$ l'hypothèse H_n suivante :
H_n : "$\Delta_n=\frac{(n+1)a^n}{2^n}$ et $\Delta_{n+1}=\frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}$."
Puisque $\Delta_1=a$ et $\Delta_2=a^2-bc=\frac{3a^2}{4}$, H_1 est vraie. Supposons l'hypothèse vraie au rang n et prouvons-la au rang $n+1$. On a directement $\Delta_{n+1}=\frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}$. De plus,
$$\Delta_{n+2}=a\Delta_{n+1}-bc\Delta_n=\frac{(n+2)a^{n+2}}{2^{n+1}}-\frac{a^2}{4}\times\frac{(n+1)a^n}{2^n}=\frac{(n+3)a^{n+2}}{2^{n+2}}.$$
Ceci prouve H_{n+2}.

Exercice 9 - Déterminant circulant - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - ⋆⋆

Effectuons le calcul demandé. On obtient que la k-ième colonne de AM est égale à la k-ième colonne de M multipliée par $a_1+a_2\omega^{k-1}+\dots+a_n\omega^{(k-1)(n-1)}$. En notant
$$P(x)=a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1},$$
on a donc d'une part
$$\det(AM)=P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\det(M)$$
et d'autre part
$$\det(AM)=\det(A)\det(M).$$
Puisque le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Van der Monde), on a :
$$\det(A)=P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}).$$

Exercice 10 - D'après CCP - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On va prouver par récurrence sur n que ce déterminant vaut $1+x_1y_1+\dots+x_ny_n=\Delta_n$. La formule est vraie au rang n, supposons-la vraie au rang $n-1$ et prouvons-la au rang n. Par multilinéarité du déterminant, on a :
$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & 0 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & x_ny_n. \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la dernière colonne, on trouve que le deuxième déterminant vaut Δ_{n-1}. Pour le second, on peut factoriser par x_n dans la dernière ligne et par y_n dans la dernière colonne. On trouve que :

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ y_1 & \dots & y_{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

On effectue alors $C_1 - y_1C_n \to C_1$, $C_2 - y_2C_n \to C_n, \dots$, et on trouve

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} + x_ny_n.$$

Ceci achève la preuve de l'hypothèse de récurrence, et donc du résultat.

Exercice 11 - - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On met i en facteur dans chaque ligne de la matrice. On voit alors apparaitre le déterminant de VanderMonde $V(1,2,\dots,n)$. Le déterminant recherché vaut donc :

$$\begin{aligned} D &= n! \prod_{1\leq i<j\leq n} (j-i) \\ &= n! \prod_{1\leq j\leq n} \prod_{1\leq i<j} (j-i) \\ &= n! \prod_{1\leq j\leq n} (j-1)! \\ &= 1!2!\dots n! \end{aligned}$$

Calculs théoriques

Exercice 12 - - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - ⋆

On a :

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$$

(car l'image de AB, vue comme application linéaire, est contenue dans l'image de A). Maintenant, le théorème du rang garantit que

$$\mathrm{rg}(A) \leq p < n.$$

Puisque $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(AB) = 0$.

Exercice 13 - Déterminant de la transposition - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - ⋆⋆

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques. Soit $(A_1,\dots,A_p)$ et $(B_1,\dots,B_q)$ une base respective de l'espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques. $(A_1,\dots,A_p,B_1,\dots,B_q)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais $\phi(A_i)=A_i$ tandis que $\phi(B_j)=-B_j$. On a donc $\det(\phi)=(-1)^q$. Il suffit ensuite de se souvenir que $p=\frac{n(n+1)}{2}$, ou $q=\frac{n(n-1)}{2}$.

Comatrice et formules de Cramer

Exercice 14 - - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - ⋆⋆

Trouvons d'abord une condition nécessaire. Puisque $M\in M_n(\mathbb{Z})$, $\det(M)\in\mathbb{Z}$. D'autre part, si $M^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})$, son déterminant est un entier et donc $\det(M^{-1})=\frac{1}{\det M}\in\mathbb{Z}$. Ceci entraine que $\det(M)=\pm 1$.
Réciproquement, si $\det(M)=\pm1$, alors M est inversible. De plus, toutes les entrées de sa comatrice, qui sont obtenus comme déterminants de la matrice, sont des entiers. De la formule de Cramer, on déduit que $M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{comat}(M)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 15 - **Rang de la comatrice** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

a. – Si A est inversible, la formule de Cramer ${}^t\mathrm{comat}(A)A=\det(A)I_n$ prouve que $\mathrm{comat}(A)$ est inversible.
   – Si le rang de A est inférieur ou égal à n-2, puisque la comatrice est fabriquée à partir de déterminants extraits d'ordre $n-1$, la comatrice est nulle.
   – Si le rang de A vaut $n-1$, notons u (resp. v) l'endomorphisme associé à A (resp. à ${}^t\mathrm{comat}(A)$) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Nécessairement, on a $\mathrm{Im}(u)\subset\ker(v)$, et donc la dimension du noyau de v est au supérieur à $n-1$. Ce n'est pas n, puisque la comatrice n'est pas la matrice nulle (un des déterminants extraits d'ordre $n-1$ de A est non nul). Le théorème du rang prouve alors que le rang de la comatrice est 1.

b. – Le cas $A=0$ donne une solution.
   – Dans le cas où le rang de A est compris entre 1 et $n-2$, l'étude précédente montre que l'équation est impossible (sinon A serait la matrice nulle).
   – Si le rang de A est $n-1$, le rang de la comatrice est $1<n-1$: l'équation est toujours impossible.
   – Si A est inversible, les solutions sont toutes les matrices A telles que ${}^tAA=(\det A)I_n$. Mais on a alors $\det({}^tAA)=(\det A)^2=\det A$, équation qui entraîne que $\det A=1$. Les solutions sont alors les matrices A vérifiant ${}^tAA=I_n$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices orthogonales.

Exercice 16 - **Polynôme caractéristique de la comatrice** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆⋆

On note B la transposée de la comatrice de A, il suffit de calculer le polynôme caractéristique de B. On suppose d'abord que A est inversible. La formule de Cramer s'écrit encore :

$$B=\det(A)A^{-1},$$

ce qui donne :

$$B-XI_n=\det(A)\left(A^{-1}-\frac{X}{\det A}I_n\right).$$

On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, répétées autant de fois que leur multiplicité pour en avoir exactement n. On rappelle que le déterminant de A vaut :

$$\det(A)=\prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

Par ailleurs, les valeurs propres de A^{-1} sont les $\frac{1}{\lambda_j}$, et le polynôme caractéristique de A^{-1} vaut donc :

$$P_{A^{-1}}(X)=(-1)^n\prod_{j=1}^n\left(X-\frac{1}{\lambda_j}\right).$$

On obtient finalement que :

$$\begin{array}{rcl}P_B(X)&=&(-1)^n\prod_{j=1}^n\lambda_j^n\prod_{j=1}^n\left(\frac{X}{\lambda_1\dots\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_i}\right)\\ &=&(-1)^n\prod_{i=1}^n\left(X-\prod_{m\neq i}\lambda_m\right).\end{array}$$

Dans le cas où A n'est pas inversible, il est bien connu que pour $r>0$ assez petit, $A_r=A+rI_n$ est inversible, et si r tend vers 0, la suite A_r tend vers A. En outre, les valeurs propres de A_r tendent vers les valeurs propres de A. Il suffit donc d'appliquer le résultat précédent à A_r, puis de faire tendre r vers 0 pour vérifier que le résultat est encore valable.

Applications

Exercice 17 - Inversibilité - *L1/Math Sup* - $\star$

L'application linéaire associée à M_α est bijective si et seulement si la matrice M_α est inversible, si et seulement si le déterminant de M_α est non-nul. On calcule donc ce déterminant. En ajoutant L_3 à L_1 et $2L_3$ à L_2, on trouve :

$$\det(M_\alpha)=\begin{vmatrix}0&4&\alpha\\0&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}4&\alpha\\1&1\end{vmatrix}=\alpha-4.$$

L'application linéaire associée à M_α est donc bijective si et seulement si $\alpha\neq 4$.

Exercice 18 - Inversibilité d'une matrice à paramètres - *L1/Math Sup* - $\star$

Il suffit de calculer le déterminant. Il faut le calculer de façon suffisamment intelligente pour qu'il apparaisse immédiatement sous forme factorisée. Pour la première matrice, commencer par tout ajouter sur la première colonne.

$$\begin{array}{rcl}
\det(A) & = & \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 & = & \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 & = & (a-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 & = & (a-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
 & = & (a-2)\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\
 & = & (a-2)a\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\
 & = & a(a-2)\big((a+1)^2-1\big) = a^2(a-2)(a+2).
\end{array}$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $a\neq 0,2,-2$.
Pour la matrice B, on procède de la même façon, en commençant par mettre $m^2-m=m(m-1)$

en facteur sur la dernière colonne.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m & m & 1\\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1\\ 0 & m & m & 0\\ 1 & m & 3m-1 & 0\end{vmatrix}\\
&= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m & m & 1\\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1\\ 0 & m & m & 0\\ 0 & 1 & m & -1\end{vmatrix} (L4-L2\to L4)\\
&= -m(m-1)\begin{vmatrix} m & m & 1\\ m & m & 0\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}\\
&= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} m & m & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}\\
&= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} m & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & m-1 & -1\end{vmatrix} (C2-C1\to C1)\\
&= m^2(m-1)\begin{vmatrix} 0 & 1\\ m-1 & 1\end{vmatrix}\\
&= -m^2(m-1)^2
\end{aligned}$$

La matrice est inversible si et seulement si $m\neq 0,1$.

Exercice 19 - Famille libre - *L1/Math Sup* - $\star$

Puisqu'on est en dimension 3, la famille (e_1,e_2,e_3) est une famille libre si et seulement si c'est une base. Soit M la matrice de ses trois vecteurs, ie

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & t\\ 1 & t & 1\\ t & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

La famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice M est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(M)\neq 0$. Mais on a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & t\\ 1 & t & 1\\ t & 1 & 1\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t\\ t+2 & t & 1\\ t+2 & 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t\\ 1 & t & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= (t+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & t\\ 0 & t-1 & 1-t\\ 0 & 0 & 1-t\end{vmatrix}\\
&= -(t+2)(t-1)^2.
\end{aligned}$$

La famille est donc une base si et seulement si $t \neq -2$ et $t \neq 1$.

Exercice 20 - A quelle condition la famille est-elle libre ? - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires telle qu'on ait la relation $\sum_{j=1}^n \lambda_j(u_j+s)=0$. Développant, on trouve que cette relation est équivalente à $\sum_{j=1}^n \big(\lambda_j+(\lambda_1+\dots+\lambda_n)\alpha_j\big)u_j=0$. La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, ceci est équivalent à

$$\forall j\in\{1,\dots,s\},\ \lambda_j+(\lambda_1+\dots+\lambda_n)\alpha_j=0.$$

On reformule ces conditions en tant que système d'inconnues $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

$$\begin{pmatrix} (1+\alpha_1) & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1\\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha-2 & \dots & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n & 1+\alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

La famille $(u_i+s)_{1\leq i\leq n}$ est libre si et seulement si ce système admet pour seule solution la solution identiquement nulle, $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$. Autrement dit, si et seulement si la matrice

$$A=\begin{pmatrix} (1+\alpha_1) & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1\\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n & 1+\alpha_n \end{pmatrix}$$

est inversible. Pour déterminer si A est inversible, on calcule son déterminant, en commençant par retirer la dernière colonne à toutes les précédentes :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_1\\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \dots & 1+\alpha_n\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_1\\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1+\alpha_1+\dots+\alpha_n\end{vmatrix}\\ &= 1+\alpha_1+\dots+\alpha_n.\end{aligned}$$

En résumé, on a prouvé que $(u_i+s)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre si et seulement si $1+\alpha_1+\dots+\alpha_n\neq 0$.

Exercice 21 - Polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Calculons le déterminant de cette famille (de $(n+1)$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$) par rapport à la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$. On a

$$(X-z_i)^n=\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^{n-j}z_i^{n-j}X^j.$$

Le déterminant recherché est donc

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \dots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} \\ &= \binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \dots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \dots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde, qui est non-nul puisque les z_i sont supposés tous distincts. La famille considérée est effectivement une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 22 - Similarité - *L1/Math Sup/Oral Mines* - ⋆⋆

Ecrivons $A = PBP^{-1}$ sous la forme $AP = PB$. Soit P_1 la partie réelle de P, et P_2 sa partie imaginaire. Alors, prenant la partie réelle puis la partie imaginaire de l'équation précédente, et puisque A et B sont à coefficients réels, on obtient $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = BP_2$. Ainsi, pour tout réel x, on a $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$. Il suffit donc de prouver qu'il existe un réel x tel que $P_1 + xP_2$ est inversible. Posons $Q(X) = \det(P_1 + XP_2)$. Q est un polynôme qui n'est pas identiquement nul puisque $Q(i) = \det(P) \neq 0$. Ainsi, il existe un réel x tel que $Q(x) \neq 0$. Pour ce réel, la matrice $M = (P_1 + xP_2) \in GL_n(\mathbb{R})$, et $A = MBM^{-1}$.

Exercice 23 - Densité des matrices inversibles - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit la fonction $P(x) = \det(A + xI)$. P est un polynôme, il ne possède donc qu'un nombre fini de racines. En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que P ne s'annule pas en x, pour $|x| < \alpha$, $x \neq 0$. La caractérisation de l'inversibilité des matrices en fonction de la non-nullité des déterminants donne le résultat.

Exercice 24 - Enigme du berger - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1.a Si la matrice est de taille 1, le résultat est évident. On suppose le résultat vrai pour toute matrice carrée de taille $n-1$ vérifiant les conditions de l'énoncé, et on le prouve pour toute matrice carré de taille n. Soit $A = (a_{i,j})$ une telle matrice carrée. On calcule son déterminant en développant par rapport à la première colonne, et on note Δ_i le déterminant obtenu en barrant la i−ème ligne et la première colonne. On a donc :

$$\det(A) = a_{1,1}\Delta_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}\Delta_i.$$

Chaque Δ_i est un nombre entier d'après la formule qui permet de calculer le déterminant, donc, pour $i \geq 2$, par hypothèse, $a_{i,1}(-1)^i\Delta_i$ est un nombre pair. La somme de nombres pairs reste un nombre pair, on a donc $\sum_{i=2}^n a_{i,1}(-1)^{i+1}\Delta_i$ qui est un nombre pair. De plus, $a_{1,1}$ est impair, et par hypothèse de récurrence Δ_1 aussi. En réunissant tout, on obtient bien que $\det(A)$ est impair.

1.b. Un entier impair est non nul, c'est donc que le déterminant de la matrice est différent de zéro et que la matrice est inversible.

2.a. Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne porte la somme des nombres de la ligne correspondante de B. Comme il y a toujours autant de moutons dans chaque troupeau, la somme vaut en regroupant les termes $50 \times 0 + 50 \times 2 + 1 = 101$. Le résultat est donc la matrice à 101 lignes

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 101 \\ \vdots \\ 101 \end{pmatrix}.$$

2.b On s'intéresse à la valeur portée par la $i-$ème ligne, et on note A et B les troupeaux choisis pour séparer les moutons à cette $i-$ème étape. Cette valeur vaut :

$$\text{poids mouton } i + 2 \times \sum_{\text{mouton dans } B} \text{poids mouton},$$

ce qui fait encore :

$$\text{poids mouton } i + 2 \times \text{poids des moutons dans } B.$$

Maintenant, le poids total du troupeau de mouton vaut :

$$\text{poids mouton } i + \text{poids des moutons dans } A + \text{poids des moutons dans } B.$$

Mais par hypothèse,

$$\text{poids des moutons dans } A = \text{poids des moutons dans } B.$$

La matrice recherchée est donc :

$$\begin{pmatrix} \text{poids troupeau} \\ \text{poids troupeau} \\ \vdots \\ \text{poids troupeau} \end{pmatrix}.$$

2.c C'est une application directe de la question 1.

2.d D'après les questions a. et b., on a :

$$BX = \lambda B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $\lambda = \frac{\text{poids troupeau}}{101}$. Puisque B est inversible, on obtient en multipliant par B^{-1} à gauche :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

C'est bien que tous les moutons ont le même poids !

Exercice 25 - Résultant - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

a. Supposons que P et Q ont un facteur commun D. On factorise $P = DB$ et $Q = DA$, A et B vérifient les conditions voulues. Réciproquement, si $P \wedge Q = 1$ et $AP = BQ$, alors $P|BQ$ et par le théorème de Gauss $P|B$. Ceci contredit les contraintes imposées à B.

b. On note $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$. On a :

$$\begin{aligned} P \wedge Q = 1 &\iff \exists (A,B) \in \mathbb{C}[X]^2,\ A \neq 0,\ B \neq 0,\ AP = BQ,\ \deg(A) < m,\ \deg(B) < n \\ &\iff \text{la famille } (P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) \text{ est liée} \\ &\iff \det(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) = 0. \end{aligned}$$

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ et $Q = b_0 + \dots + b_m X^m$, ce déterminant s'écrit :

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & b_0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_n & \vdots & & b_m & & \\ 0 & a_n & & & & \\ \vdots & \vdots & a_n & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix}.$$

C'est le *résultant* de P et Q.

Divers

Exercice 26 - Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ - *L2/Math. Spé* - ⋆⋆⋆⋆

$GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ et les matrices de dilation $D_i(\lambda)$ (matrice avec des 1 sur la diagonale, sauf en $i-$ème position où il y un λ). On a :

$$\phi(T_{i,j}(\lambda)) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m = P(\lambda).$$

Maintenant, il est facile de vérifier que $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(2\lambda)$, ce qui entraîne que pour tout λ de $\mathbb{K}$, on a $P(2\lambda) = [P(\lambda)]^2$. Le corps $\mathbb{K}$ étant infini, cette égalité prouve que $P(2X) = P(X^2)$, et par considération de degré, $P \equiv a_0$, avec $a_0^2 = a_0$ et $a_0 \neq 0$ (puisqu'on arrive dans $\mathbb{K}^*$). On a donc :

$$\phi(T_{i,j}(\lambda)) = 1.$$

Si $Q(\lambda) = \phi(D_1(\lambda)) = b_0 + \dots + b_m\lambda^m$, $b_m \neq 0$, on a :

$$Q(\lambda)Q(1/\lambda) = \phi(I_n) = 1.$$

On a donc :

$$\lambda^m = (b_0 + \dots + b_m\lambda^m)(b_0\lambda^m + \dots + b_m).$$

On en déduit, puisque K est infini et que b_m est supposé non nul, que $b_0 = \dots = b_{m-1} = 0$ et que $b_m^2 = 1$. Puisque $Q(1) = 1$, on a forcément $b_m = 1$. Maintenant, si $M \in GL_n(\mathbb{K})$, M se décompose en

$$M = D_1(\det M)U,$$

où U est le produit de matrices de transvection. Ceci prouve que :

$$\phi(M) = (\det M)^m.$$