

AUTOUR DU PRODUIT

Exercice 1 - Produits possibles - L1/Math Sup - ★

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques?

Exercice 2 - Des calculs de produits - L1/Math Sup - ★

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 - Commutant - L1/Math Sup - ★

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 4 - Annulateur - L1/Math Sup - ★

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer AB , AC . Que constate-t-on? La matrice A peut-elle être inversible? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle)

Exercice 5 - Produit non commutatif - L1/Math Sup - ★

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 6 - Puissance n -ième - avec la formule du binôme - L1/Math Sup - ★

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n .

Exercice 7 - Puissance n -ième - avec un polynôme annulateur - L1/Math Sup - ★★

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

RANG

Exercice 8 - Explicite... - L1/Math Sup - ★

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{1.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \mathbf{2.} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{3.} \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{4.} \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Exercice 9 - Avec un paramètre - L1/Math Sup - ★★

Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 - Décomposition de matrices de rang donné - L1/Math Sup/L2/Math Spé/Oral Mines - ★★

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\text{rg}(M) = 1$, il existe deux vecteurs X et Y tels que $M = XY^t$.
2. Montrer que si $\text{rg}(M) = 2$, il existe deux couples de vecteurs indépendants (X, Z) et (Y, T) tels que $M = XY^t + ZT^t$.
3. Généraliser aux matrices de rang k .

INVERSION DE MATRICES

Exercice 11 - Inverser une matrice sans calcul! - L1/Math Sup - ★

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Exercice 12 - Inverse avec calcul! - *L1/Math Sup* - ★

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 - Matrice inverse et polynômes - *L1/Math Sup* - ★★

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 14 - Matrice à diagonale dominante - *L1/Math Sup* - ★★★

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} a_{i,j}$. Montrer que la matrice A est inversible.

ÉTUDE D'ENSEMBLES DE MATRICES

Exercice 15 - Centre - *L1/Math Sup* - ★

Soit $n \geq 1$. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient situé à la i -ième ligne et à la j -ième colonne qui vaut 1.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
2. En déduire quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 - Un sous-espace vectoriel de matrices - *L1/Math Sup* - ★

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(E)$.

Exercice 17 - Matrices symétriques et anti-symétriques - *Math. Sup* - ★★

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques ($A = {}^tA$) et l'ensemble des matrices anti-symétriques ($A = -{}^tA$) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18 - Matrices magiques - L1/Math Sup - ★★★

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = \sum_{i=1}^n m_{j,i} = \sum_{i=1}^n m_{i,i} = \sum_{i=1}^n m_{i,n+1-i}.$$

On note $MG(n)$ l'ensemble des matrices magiques d'ordre n .

1. Que signifie être une matrice magique ?
2. Montrer que $MG(n)$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : MG(n) \rightarrow \mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$, qui envoie la matrice M qui s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} & & & & m_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & M_1 & & & m_{n-2,n} \\ m_{n-1,1} & \dots & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

sur $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

4. En déduire la dimension de $MG(n)$.

APPLICATIONS DES MATRICES

Exercice 19 - Matrices et suites - L1/Math Sup - ★★

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n , et c_n uniquement en fonction de n .

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} =$

AX_n . En déduire que $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p \geq 3$.

3. Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Exercice 20 - Matrice et systèmes linéaires - Ecrit du Capes - ★★★

Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ trois fonctions continues sur I , à valeurs réelles, et pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_1, a_2, a_3 non tous nuls tels que la fonction

$$\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$$

admette au moins trois racines distinctes x_1, x_2, x_3 . Prouver qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) + \lambda_3\theta_k(x_3) = 0,$$

pour $k = 1, 2$ ou 3 .

MATRICES - UN PEU DE THÉORIE

Exercice 21 - Matrices de rang r - L1/Math Sup - ★★

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 22 - Matrice équivalente - L2/Math Spé/Oral Centrale - ★★

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 23 - Matrices de trace nulle - Math Spé/L2 - ★★★

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 24 - Matrices nilpotentes - Math Spé/L2 - ★★

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^k = 0$ pour un entier k . Montrer qu'il existe en fait $m \leq n$ avec $A^m = 0$.
2. Existe-t-il une matrice complexe A dont le carré soit égal à la matrice suivante ?

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 - Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K}^* - Math. Spé - ★★★

Soit \mathbb{K} un corps infini, $\phi : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ un morphisme de groupes, $\phi(M)$ s'exprimant comme un polynôme des coefficients de M . Montrer que ϕ est une puissance du déterminant.