

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

### APPLICATIONS LINÉAIRES SUR $\mathbb{R}^n$

#### Exercice 1 - AL-0 - L1 - \*

1. Soient  $X = (x, y, z)$ ,  $X' = (x', y', z')$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors on a

$$\begin{aligned} u(X + X') &= u(x + x', y + y', z + z') \\ &= (-x - x' + y + y', x + x' - y - y', -x - x' + z + z', -y - y' + z + z') \\ &= ((-x + y) + (-x' + y'), (x - y) + (x' - y'), (-x + z) + (-x' + z'), \\ &\quad (-y + z) + (-y' + z')) \\ &= (-x + y, x - y, -x + z, -y + z) + (-x' + y', x' - y', -x' + z', -y' + z') \\ &= u(X) + u(X'). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda X) &= u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= u(-\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, -\lambda x + \lambda z, -\lambda y + \lambda z) \\ &= \lambda(-x + y, x - y, -x + z, -y + z) \\ &= \lambda u(X). \end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  est linéaire. On aurait pu aussi utiliser la caractérisation des applications linéaires de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  : chaque coordonnée de  $u(x, y, z)$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $(x, y, z)$ .

2. On a

$$\begin{aligned} u(\mathcal{E}_1) &= u(1, 0, 0) = (-1, 1, -1, 0) = -\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3 \\ u(\mathcal{E}_2) &= u(0, 1, 0) = (1, -1, 0, -1) = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_4 \\ u(\mathcal{E}_3) &= u(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) = \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4. \end{aligned}$$

3. On applique la définition et on trouve

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Puisque  $\mathbb{R}^4$  est de dimension 4 et que la famille considérée a quatre éléments, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. C'est particulièrement facile ici, car la famille est *triangulaire* par rapport à la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . En effet, si on a  $a\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_2 + c\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2 = 0$ , ceci se traduit en

$$\begin{cases} a - c + d = 0 \\ b + c - d = 0 \\ -c = 0 \\ -d = 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0.$$

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

5. Il s'agit d'exprimer chaque  $u(\mathcal{E}_i)$  en fonction des vecteurs de la nouvelle base. Pour deux des vecteurs, c'est très facile, car  $u(\mathcal{E}_1) = u(\mathcal{E}_1)$  et  $u(\mathcal{E}_2) = u(\mathcal{E}_2)$  ! C'est plus difficile pour  $u(\mathcal{E}_3)$ , qu'il faut exprimer dans la nouvelle base. Autrement dit, il faut trouver  $a, b, c, d$  de sorte que

$$a\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_2 + cu(\mathcal{E}_1) + du(\mathcal{E}_2) = (0, 0, 1, 1).$$

Ceci revient à résoudre le système

$$\begin{cases} a - c + d = 0 \\ b + c - d = 0 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Ainsi, on  $u(\mathcal{E}_3) = -u(\mathcal{E}_1) - u(\mathcal{E}_2)$  et la matrice de  $u$  dans les bases  $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$  et  $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$  est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2 - AL-1 - L1 - \*

1. (a) On a  $w_1 = \mathcal{E}_1 - 2\mathcal{E}_2$ ,  $w_2 = -\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2$  et  $w_3 = 2\mathcal{E}_3$ . On en déduit que la matrice de  $u$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) On a

$$u(W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -2x + 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a

$$W \in \ker(u) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

On a donc  $\ker(u) = \text{vect}(-1, 1, 0)$ . Le vecteur  $(1, 1, 0)$  est une base de  $\ker(u)$ . Par le théorème du rang, la dimension de  $\text{Im}(u)$  vérifie

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\ker(u))$$

ce qui donne  $\dim(\text{Im}(u)) = 2$ . Une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$  est donnée par  $(w_1, w_2, w_3)$ . Il suffit d'en extraire une famille libre à deux éléments. C'est par exemple le cas de  $(w_1, w_3)$ . On en déduit que  $(w_1, w_3)$  est une base de  $\text{Im}(u)$ .

- (b) Il suffit de démontrer que la réunion d'une base de  $\ker(u)$  et d'une base de  $\text{Im}(u)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Autrement dit, avec les calculs précédents, il suffit de prouver que la famille  $((1, 1, 0), w_1, w_3)$  est libre. C'est facile et laissé au lecteur.

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

3. On calcule  $u - Id$  :

$$(u - Id)(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ -2x + y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(u - Id)(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On a donc  $\ker(u - Id) = \{0\}$  et donc  $u$  est injective. Par le théorème du rang, on a  $\dim(\text{Im}(u - Id)) = 3$ . Comme  $\text{Im}(u - Id)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , on a en fait  $\text{Im}(u - Id) = \mathbb{R}^3$ .  $u$  est aussi surjective. C'est donc un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 3 - AL-2 - L1 - \*

1. On écrit en colonne  $u(\mathcal{E}_i)$ . On trouve

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On commence par calculer  $u(x, y, z)$ . On a

$$u(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4z \\ 3y \\ 2x + 4z \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(x, y, z) \in \ker(u) \iff \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

On a donc  $\ker(u) = \text{vect}(-2, 0, 1)$  et le vecteur  $(-2, 0, 1)$  est une base de  $\ker(u)$ .  $\ker(u)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , et donc l'endomorphisme  $u$  n'est pas injectif. Comme  $u$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{R}^3$ , il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$

3. On sait, d'après le théorème du rang, que  $\text{Im}(u)$  est de dimension 2. On sait aussi que  $(u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2), u(\mathcal{E}_3))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}u$ . Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que  $(u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2))$  est une telle famille. C'est donc une base de  $\text{Im}(u)$  qui est de rang 2.

4. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de  $\ker(u)$  et d'une base de  $\text{Im}(u)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille  $((-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0))$  est une famille libre. C'est très facile et laissé au lecteur...

# Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

## Exercice 4 - - L1/Math Sup - \*

1. Utilisant la définition de  $f$ , on a :

$$\begin{aligned}f(e_1) &= (1, -1, 0, 1) \\f(e_2) &= (0, 1, 1, 1) \\f(e_3) &= (1, 0, 1, 2)\end{aligned}$$

On sait que la famille  $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ . Or,  $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$  et donc  $f(e_3)$  est combinaison linéaire de  $(f(e_1), f(e_2))$ . Ainsi, la famille  $(f(e_1), f(e_2))$  est déjà génératrice de  $\text{Im}(f)$ . De plus, elle est libre car les deux vecteurs sont non-nuls et ne sont pas proportionnels. On en déduit que  $(f(e_1), f(e_2))$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

2. On a :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur  $(-1, -1, 1)$  engendre  $\ker(f)$ . Comme il est non-nul, c'est une base de  $\ker(f)$ . En particulier, on trouve que  $\ker(f)$  est de dimension 1, ce que l'on peut aussi obtenir en utilisant le théorème du rang.

3.  $f$  n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit à  $\{0\}$ .  $f$  n'est pas surjective, car son image n'est pas  $\mathbb{R}^3$  tout entier. En effet, la dimension de  $\text{Im}(f)$  est 2, et non 3.

## Exercice 5 - - L1/Math Sup - \*

1. On a

$$\begin{aligned}f(e_1) &= (1, 0, 0, 1) = e_1 + e_4 \\f(e_2) &= (-1, 1, 0, 1) = -e_1 + e_2 + e_4 \\f(e_3) &= (1, 1, 0, 3) = e_1 + e_2 + 3e_4 \\f(e_4) &= (0, 1, 0, 2) = e_2 + 2e_4\end{aligned}$$

2. Utilisant les résultats de la question précédente, on trouve que la matrice  $A$  est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

- On remarque que  $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$  et que  $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2)$ .
- La famille  $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ . De plus,  $f(e_3)$  et  $f(e_4)$  sont combinaison linéaire de  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ . On en déduit que la famille  $(f(e_1), f(e_2))$  est déjà une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ . De plus, cette famille est libre car  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$  sont deux vecteurs non-nuls qui ne sont pas proportionnels. On en déduit que  $(f(e_1), f(e_2))$  est une base de  $\text{Im}(f)$ , qui est de dimension 2.
- D'après le théorème du rang, on a :

$$4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + 2,$$

ce qui prouve que  $\dim(\ker(f)) = 2$ . De plus, les vecteurs  $u$  et  $v$  sont éléments de  $\ker(f)$ . En effet,

$$\begin{aligned} f(u) &= (-2 + 1 + 1, -1 + 1, 0, -2 - 1 + 3) = (0, 0, 0, 0) \\ f(v) &= (-1 + 1, -1 + 1, -1 - 1 + 2) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

La famille  $(u, v)$  est donc une famille de deux vecteurs de  $\ker(f)$  qui est libre (car  $u$  et  $v$  sont non-nuls et non proportionnels). De plus,  $\ker(f)$  est de dimension deux. On en déduit que  $(u, v)$  est une base de  $\ker(f)$ .

### Exercice 6 - Définie par une base - L1/Math Sup - ★

- $(u, v)$  sont deux vecteurs non-nuls de  $\mathbb{R}^2$ , non colinéaires. Ils forment une famille libre de  $\mathbb{R}^2$  de deux vecteurs. Or,  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2.  $(u, v)$  est donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- Exprimons  $w$  dans la base  $(u, v)$ . On a  $w = 3u - v$ . Pour que  $f$  soit linéaire, on doit avoir

$$f(w) = 3f(u) - f(v)$$

soit

$$(5, a) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4).$$

Pour que  $f$  soit linéaire, il est donc nécessaire que  $a = 4$ . Réciproquement, on définit ainsi bien une application linéaire, en définissant l'image d'une base.

### Exercice 7 - A noyau fixé - L1/Math Sup - ★★

**Première méthode :** Une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même est définie par

$$f(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)$$

où les  $a_i, b_i, c_i$  sont des réels. On va déterminer quelle(s) valeur(s) leur donner pour que  $f(u) = 0$  et  $f(v) = 0$ . On a

$$f(u) = 0 \iff (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0) \text{ et } f(v) = 0 \iff (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3) = (0, 0, 0).$$

On obtient  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  et  $b_1 = -c_1, b_2 = -c_2, b_3 = -c_3$ . Ainsi, l'application  $f$  suivante convient

$$(x, y, z) \mapsto (y - z, y - z, y - z).$$

Puisque  $u, v \in \ker(f)$ , le sous-espace vectoriel  $E$  engendré par  $(u, v)$  est contenu dans  $\ker(f)$ . De plus,  $f$  n'étant pas identiquement nulle, son noyau est de dimension au plus 2. On en déduit

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

que  $\ker(f)$  est de dimension exactement 2, et que  $\ker(f) = E$ .

**Deuxième méthode :** Une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même est complètement définie par l'image d'une base. Complétons d'abord  $(u, v)$  en une base (c'est possible, car c'est une famille libre). Posons  $w = (0, 0, 1)$ . Alors on vérifie facilement que la famille  $(u, v, w)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  à trois éléments, donc une base de  $\mathbb{R}^3$ . On définit  $f$  par

$$f(u) = (0, 0, 0), \quad f(v) = (0, 0, 0), \quad f(w) = (1, 0, 0).$$

Ceci définit parfaitement  $f$  et, comme dans la première méthode, on prouve que le noyau de  $f$  est exactement  $E$ .

### Exercice 8 - Application linéaire à contraintes - L1/Math Sup - \*\*

Un endomorphisme est uniquement défini par l'image d'une base. Il suffit donc de calculer quelles doivent être les valeurs de  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ ,  $f(e_3)$ ,  $f(e_4)$ . On sait déjà que :

$$- f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3.$$

$$- f(3e_4) = e_2 - 2f(e_1), \text{ soit } f(e_4) = \frac{1}{3}(-2e_1 + 3e_2 - 2e_3).$$

Reste à définir  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$ . Pour cela, on va chercher une base de  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$ . On a aisément :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - 2y \\ t = x + 3y \end{cases}$$

On en déduit que  $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 3)\}$  est une base de  $F$ . Puisqu'on veut que  $F = \ker(f)$ , on doit donc avoir

$$f(e_1) - f(e_3) + f(e_4) = 0 \implies f(e_3) = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3$$

et

$$f(e_2 - 2e_3 + 3e_4) = 0 \implies f(e_2) = 2f(e_1) - f(e_4).$$

Donc l'endomorphisme  $f$ , s'il existe, est unique. Réciproquement, soit  $f$  l'endomorphisme défini par les formules précédentes. Alors le premier point est vérifié, et puisque l'image d'une base de  $F$  est envoyée par  $f$  sur 0, on sait que  $F \subset \ker(f)$ . Pour démontrer l'égalité, il suffit, puisque  $\dim(F) = 2$ , de prouver que  $\dim(\ker(f)) \leq 2$ . Par le théorème du rang, il suffit de prouver que  $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$ . Mais  $f(e_1)$  et  $f(e_4)$  sont deux vecteurs indépendants de  $\text{Im}(f)$ . Et donc  $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$ , ce qui prouve le résultat.

## APPLICATIONS LINÉAIRES ET LEURS MATRICES

### Exercice 9 - Donnée par une matrice - L1/Math Sup - \*

Le noyau de  $f$  est l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  tels que

$$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4y \\ y = y \\ z = 3y \end{cases}$$

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

Le noyau de  $f$  est donc la droite vectorielle de vecteur directeur  $(-4, 1, 3)$ . Par le théorème du rang,  $\text{Im}(f)$  est de dimension 2. De plus,  $f(e_1) = (1, -1, 0)$  et  $f(e_2) = (1, 2, 3)$  sont clairement indépendants. Donc  $(f(e_1), f(e_2))$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

### Exercice 10 - Réduction - L1/Math Sup - ★

On a

$$f(x, y, z) = 0 \iff x + y - z = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x + y \end{cases}.$$

$\ker(f)$  est donc un plan vectoriel, de base  $(u, v)$  avec  $u = (1, 0, 1)$  et  $v = (0, 1, 1)$ . D'après le théorème du rang, on sait que  $\text{Im}(u)$  est de dimension 1. Il est engendré par exemple par le vecteur non nul  $w = f(e_1) = (1, -3, -2)$ .

On remarque que  $w = u - 3v$  est élément de  $\ker(f)$ . Ainsi,  $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$  et donc  $f^2 = 0$ . Par suite,  $f^n = 0$  pour tout  $n \geq 2$  et la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est elle aussi nulle. Donc  $M^n = 0$  pour tout  $n \geq 2$ .

### Exercice 11 - Changement de base - L1/Math Sup - ★

1. Puisqu'on a des familles de trois (respectivement deux) vecteurs dans un espace de dimension trois (resp. deux), il suffit de prouver que l'on a des familles libres. Pour  $(f'_1, f'_2)$  c'est clair puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ , si on a une égalité du type  $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0$ , alors on obtient

$$(b+c)e_1 + (a+c)e_2 + (a+b)e_3 = 0 \iff \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

La famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Notons  $P$  la matrice de passage de  $(e_1, e_2, e_3)$  à  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  et  $Q$  la matrice de passage de  $(f_1, f_2)$  à  $(f'_1, f'_2)$ . Alors on a :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si  $B$  est la matrice de  $u$  dans les nouvelles bases, alors la formule du changement de base nous dit que  $B = Q^{-1}AP$ . Or,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 12 - Changement de base... - L1/Math Sup - ★

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

1. Remarquons d'abord que  $u$  et  $v$  sont clairement linéaires. Notons  $A$  (resp.  $B$ ) les matrices de  $u$  (resp.  $v$ ) dans leur base canonique. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$u \circ v$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Sa matrice est donnée par le produit matriciel  $AB$ .  $v \circ u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ . Sa matrice est donnée par le produit matriciel  $BA$ . On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u \circ v(x) = (5x - 5z, -5y + 5z, 8x - y - 7z) \text{ et } v \circ u(x, y) = (-x + 7y, -2x - 6y).$$

2. Il suffit de vérifier que les deux familles sont libres, puisqu'elles comptent le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace. Pour  $\mathcal{B}'_2$ , c'est clair puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour  $\mathcal{B}'_3$ , on traduit une égalité du type  $a\mathcal{F}'_1 + b\mathcal{F}'_2 + c\mathcal{F}'_3 = 0$  en

$$(a + b + c)\mathcal{F}_1 + (b + c)\mathcal{F}_2 + c\mathcal{F}_3 = 0 \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

3. La matrice de passage est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs exprimés en fonction des anciens vecteurs. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Notons  $C$  la matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}'_2$  et  $\mathcal{B}_3$ . Comme on ne change la base que au départ, la formule de changement de base nous donne

$$C = AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons  $D$  la matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}'_2$  et  $\mathcal{B}'_3$ . Cette fois, on change de base à la fois au départ et à l'arrivée. La formule de changement de base nous donne  $D = Q^{-1}AP$ . Après calculs, on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

Notons enfin  $E$  la matrice de  $v$  dans les nouvelles bases. La formule de changement de base nous donne  $E = P^{-1}BQ$  (attention à la place de  $P$  et  $Q$ !!!). On obtient après calculs :

$$P^{-1} = P \text{ et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 13 - Surjective? - L1/Math Sup - \*

Il suffit de chercher les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles le rang de cette matrice est 3. On calcule le rang par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M_{\alpha,\beta}) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta \\ 0 & 4 & 2+\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta \\ 0 & 0 & 18-\alpha & 4-\beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 7L_3 + 4L_2 \end{array}. \end{aligned}$$

La matrice est donc de rang 3, sauf si  $\alpha = 18$  et  $\beta = 4$ .

## AUTRES APPLICATIONS LINÉAIRES

### Exercice 14 - Application linéaire définie sur les matrices - L1/Math Sup - \*\*

La preuve de la linéarité de  $f$  est laissée au lecteur. Rappelons que la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$  est la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  avec

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de calculer l'image par  $f$  de ces matrices, et de les exprimer dans la base canonique. Mais on a

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1E_{1,1} + 0E_{1,2} + 1E_{2,1} + 0E_{2,2},$$

$$f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} - 1E_{1,2} + 0E_{2,1} + 1E_{2,2},$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2},$$

$$f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 0E_{1,2} + 2E_{2,1} + 0E_{2,2}.$$

La matrice de  $f$  dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$  est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

### Exercice 15 - Avec des polynômes - L1/Math Sup - \*\*

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) - X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P + Q - X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P - XP') + Q - XQ' = f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est bien une application linéaire. De plus  $P$  est dans  $\ker(f)$  si et seulement si  $P - XP' = 0$ . Ecrivons  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Alors on a :

$$P - XP' = \sum_{k=1}^n (a_k - k a_k) X^k + a_0.$$

On en déduit que la suite  $(a_k)$  vérifie  $a_0 = 0$  and  $a_k(1 - k) = 0$  pour  $k$  allant de 1 à  $n$ . Ainsi,  $a_k = 0$  pour  $k \neq 1$ , la valeur de  $a_1$  étant quelconque. On en déduit que  $\ker(f) = \text{vect}(X)$ .

D'autre part, soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$  est élément de  $\text{Im}(f)$ , il existe  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  tel que  $Q = P' - XP$  soit, d'après le calcul précédent,

$$b_k = a_k(1 - k).$$

On en déduit  $b_1 = 0$  et donc  $Q \in F = \text{vect}(X^k; k \neq 0)$ . Réciproquement, soit  $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$  un élément de  $F$ , c'est-à-dire un polynôme sans terme en  $X$ . Alors, si on pose  $a_k = (1 - k)^{-1} b_k$ ,  $k \neq 0$ , et  $a_1 = 0$ , le calcul précédent montre que  $P' - XP = Q$  et donc  $Q \in \text{Im}(f)$ . Ainsi,  $\text{Im}(f) = F$ .

### Exercice 16 - Applications linéaires dans un espace de polynômes - L1/Math Sup -

★

1. Remarquons d'abord que si  $P \in E$ ,  $u(P)$  est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc  $u$  envoie bien  $E$  dans  $E$ . Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que  $u$  est linéaire. Mais, si  $P, Q \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q) + (1 - X)(P + \lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q + (1 - X)(P' + \lambda Q') \\ &= P + (1 - X)P' + \lambda(Q + (1 - X)Q') \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

$u$  est donc bien linéaire.

2. Puisque  $(1, X, X^2, X^3)$  est une base de  $E$ , on sait que  $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$ . On va pouvoir en extraire une base. On a :

$$u(1) = 1, \quad u(X) = 1, \quad u(X^2) = -X^2 + 2X, \quad u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$

On en déduit que  $(u(1), u(X^2), u(X^3))$  est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que  $u(X)$  s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même  $u(X) = u(1)$ ). Ainsi, ceci prouve que  $(u(1), u(X^2), u(X^3))$  est une base de  $\text{Im}(u)$ .

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

3. Ecrivons  $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , et calculons  $u(P)$  :

$$u(P) = -2aX^3 + (3a - 2b)X^2 + 2bX + c + d.$$

Ainsi, on obtient

$$u(P) = 0 \iff \begin{cases} -2a = 0 \\ 3a - 2b = 0 \\ 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d = -c \end{cases}$$

Ainsi,  $P \in \ker(u) \iff \exists c \in \mathbb{R}, P = c(X - 1)$ . Une base de  $\ker(u)$  est donné par le polynôme  $X - 1$ .

4. La réunion des bases de  $\text{Im}(u)$  et  $\ker(u)$  trouvées précédemment est  $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$ . Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de  $E$ . Ceci prouve que  $\text{Im}(u)$  et  $\ker(u)$  sont supplémentaires.

### Exercice 17 - Variante polynômiale - L1/Math Sup - ★★

Il est facile de vérifier que  $f$  est linéaire. Pour savoir si elle est injective, on calcule son noyau. Soit  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  un polynôme. Alors

$$f(P) = \sum_{i=0}^n a_i X^i - p \sum_{i=0}^n a_i X^{i+1} + \sum_{i=1}^n i a_i X^{i+1}$$

soit, après un changement d'indice

$$f(P) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - (p+1-i)a_{i-1})X^i + (n-p)a_n X^{n+1}.$$

Si  $f(P) = 0$ , on obtient donc  $a_0 = 0$  et  $a_i = (p+1-i)a_{i-1}$  pour  $1 \leq i \leq n$  ce qui entraîne  $a_i = 0$  pour tout  $i = 0, \dots, n$ . Ainsi,  $P = 0$ , le noyau de  $f$  est réduit à  $\{0\}$  et  $f$  est injective.

D'autre part, si  $P$  est un polynôme de degré  $n$ , alors le calcul précédent montre que

- pour  $n = p$ , le degré de  $f(P)$  est inférieur ou égal à  $n$ , et donc différent de  $p+1$  ;
- pour  $n \neq p$ , alors  $f(P)$  est de degré  $n+1 \neq p+1$ .

Ainsi,  $\text{Im}(f)$  ne contient pas de polynômes de degré  $p+1$ . Donc  $f$  n'est pas surjective.

### Exercice 18 - Encore des polynômes - L1/Math Sup - ★★

1.  $f$  est clairement une application linéaire. Puisque  $\deg(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)) \leq \deg(P(X))$ , elle est bien à image dans  $E$ .
2. On a

$$f(X^p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (1 + (-1)^k) X^{p-k} - 2X^p.$$

Le coefficient devant  $X^p$  est nul (il vaut  $1+1-2$ ), celui devant  $X^{p-1}$  aussi, et celui devant  $X^{p-2}$  vaut  $p(p-1)$ . Ainsi, si  $p \geq 2$ , le degré de  $f(X^p)$  est  $p-2$ . Sinon,  $f(X^p)$  est le polynôme nul. On en déduit, par linéarité, que  $f(P)$  est de degré  $\deg(P) - 2$  si  $\deg(P) \geq 2$ , et est le polynôme nul sinon. Ainsi,  $\ker(f) = \mathbb{R}_1[X]$ . Par le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(f)) = p+1-2 = p-1$ . De plus, on a vu que  $\mathbb{R}_{p-1}[X] \subset \text{Im}(f)$ . C'est donc que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$ .

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

3. Soit  $G = \{P \in \mathbb{R}_p[X]; P(0) = P'(0) = 0\}$ . Alors  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_p[X]$ . On vérifie facilement que, pour  $P(X) = a_p X^p + \dots + a_0$ ,  $P \in G \iff a_0 = a_1 = 0$ , et donc une base de  $G$  est  $(X^2, X^3, \dots, X^p)$ . Ainsi,  $G$  est de dimension  $p-1$ . Notons  $g : G \rightarrow \text{Im}(f)$ ,  $P \mapsto f(P)$ .  $g$  est injective, car  $G \cap \ker(f) = \{0\}$ . De plus,  $\dim(G) = \dim(\text{Im}(f))$ . Ainsi,  $g$  est une bijection de  $G$  sur  $\text{Im}(f)$ . Ceci prouve le résultat.

### Exercice 19 - Sur un espace de fonctions sinus/cosinus - L1/Math Sup - ★

1. Il suffit de remarquer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . C'est très facile :
- la fonction nulle est élément de  $E : 0 = 0 \cos + 0 \sin$  ;
  - si  $f = \lambda \cos + \mu \sin$  et  $g = \lambda' \cos + \mu' \sin$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors

$$af + g = (a\lambda + \lambda')f + (a\mu + \mu')g$$

est élément de  $E$ .

On peut aussi tout simplement remarquer que  $E = \text{vect}(\cos, \sin)$ .

La famille  $(\cos, \sin)$  est, par définition de  $E$ , une famille génératrice de  $E$ . De plus, cette famille est libre. En effet, si  $\lambda \cos + \mu \sin = 0$ , ceci signifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$ . Si on choisit  $x = 0$ , on trouve  $\lambda = 0$ , et si on choisit  $x = \pi/2$ , on trouve  $\mu = 0$ . La famille  $(\cos, \sin)$  est donc une base de  $E$  qui est un espace vectoriel de dimension 2.

2. Soit  $f = \lambda \cos + \mu \sin$  un élément de  $E$ . Utilisant les formules bien connues concernant la dérivation du sinus et du cosinus, on a

$$Df = f' = \mu \cos - \lambda \sin \in E$$

et donc  $Df \in E$ .

3. On sait que, pour toutes fonction dérivables  $f, g$  et tout réel  $c$ ,  $(f + g)' = f' + g'$  et  $(cf)' = cf'$ , ce qui se réécrit, pour les fonctions de  $E$ , en

$$D(f + g) = Df + Dg \text{ et } D(cf) = CD(f).$$

Autrement dit,  $D$  est un endomorphisme de  $E$ .

4. Puisque  $D(\cos) = -\sin$  et  $D(\sin) = \cos$ , la matrice de  $D$  dans la base  $(\cos, \sin)$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Puisque  $D$  est un endomorphisme de  $E$  qui est de dimension finie égale à deux, il suffit de prouver que  $D$  est injectif. Mais, si  $f = \lambda \cos + \mu \sin$  et  $Df = 0$ , alors

$$-\lambda \sin + \mu \cos = 0 \implies \lambda = \mu = 0$$

puisque la famille  $(\cos, \sin)$  est libre. On en déduit que  $D$  est injective, donc bijective.

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

6. Le contraire de dériver, c'est intégrer. On pose  $H$  l'endomorphisme de  $E$  défini par l'image de la base :

$$H(\cos) = \sin \text{ et } H(\sin) = -\cos.$$

Alors

$$D \circ H(\cos) = D(\sin) = \cos \text{ et } D \circ H(\sin) = D(-\cos) = \sin.$$

Par linéarité, on obtient que  $D \circ H = Id_E$ . De même, on a  $H \circ D = Id_E$ . Ainsi,  $H = D^{-1}$  est l'isomorphisme réciproque de  $D$ .

7. On trouve, par le même raisonnement

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 20 - Application aux polynômes - 2ème année - ★★★

1. Pour montrer que la famille est libre, il suffit de prouver que toute sous-famille finie est libre ou encore que, pour tout  $p$ , la famille  $(P_0, \dots, P_p)$  est libre. Imaginons que l'on ait une relation de liaison  $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_p P_p = 0$ , où l'un au moins des  $\alpha_i$  est non nul. Soit  $q$  le plus grand des  $i$  pour lequel  $\alpha_i \neq 0$ . Alors, le polynôme  $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_q P_q$  est de degré  $q$ , et en même temps il est nul : c'est bien sûr une contradiction. La famille  $(P_n)$  est donc libre. D'autre part, fixons un  $p \geq 0$  et  $Q$  un polynôme de degré  $p$ . Puisque  $(P_0, \dots, P_p)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_p[X]$  qui est de dimension  $p+1$ , il en est une base. Ainsi,  $Q$  peut s'écrire  $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_p P_p$ , ce qui prouve que la famille  $(P_n)$  est génératrice : c'est donc une base de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. La linéarité ne pose pas de problèmes. D'autre part, si le terme dominant de  $P$  est  $\alpha_n X^n$ , le terme dominant de  $\Delta(P)$  est  $\alpha_n \times n X^{n-1}$ . Ainsi,  $\Delta P = 0$  si et seulement  $P \in \mathbb{R}_0[X]$  (ie si  $P$  est un polynôme constant). D'autre part, posons pour  $n \geq 0$   $P_n = \Delta(X^{n+1})$ . La famille  $(P_n)$  est une famille de polynômes à degrés étagés. En outre, cette famille est contenue dans  $\text{Im}(\Delta)$ . On a donc, d'après le résultat de la question préliminaire,  $\mathbb{R}[X] = \text{vect}(P_n; n \geq 0) \subset \text{Im}(\Delta)$ . Ceci prouve que  $\Delta$  est surjective.
3. On note  $E = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = 0\}$ .  $E$  est un supplémentaire de  $\mathbb{R}_0[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . Ainsi,  $\Delta$  induit un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathbb{R}[X]$ . On montre alors l'existence et l'unicité de  $H_n$  par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 0$  étant donné par l'énoncé. Supposons  $(H_0, \dots, H_{n-1})$  uniquement construits. Alors, la remarque précédente fait qu'il existe un unique  $H_n$  de  $E$  tel que  $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ . On montre alors facilement par récurrence que pour chaque  $n$ ,  $\deg(H_n) = n$  (cela vient du fait que  $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$  si  $P$  n'est pas un polynôme constant. D'après le résultat de la question préliminaire,  $(H_n)$  forme une base de  $\mathbb{R}[X]$ .
4. Puisque  $(H_n)$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ , et puisqu'en outre la famille  $(H_n)$  est à degrés étagés, il existe des réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_p$  tels que  $P = \alpha_0 H_0 + \dots + \alpha_p H_p$ . Calculons  $\Delta^n(P)$ , sachant que  $\Delta^n(H_k) = H_{k-n}$  si  $n \leq k$ ,  $\Delta^n(H_k) = 0$  sinon. On obtient donc :

$$\Delta^n P = \alpha_n H_0 + \dots + \alpha_p H_{p-n}.$$

On évalue ensuite ce polynôme en 0, en utilisant le fait que  $H_k(0) = 0$  si  $k \neq 0$ , mais vaut 1 si  $k = 0$ . On obtient donc :

$$\Delta^n P(0) = \alpha_n.$$

## Exercices - Applications linéaires : études pratiques : corrigé

5. On va montrer que

$$(\Delta^n P)(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(X+k),$$

l'évaluation en 0 faisant le reste. Notons  $T(P)(X) = P(X+1)$ ; clairement,  $T^k(P)(X) = P(X+k)$ . Remarquons que  $\Delta = T - I$ . Puisque  $T$  et  $I$  commutent, il est légitime d'appliquer la formule du binôme, et on a :

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k T^k.$$

Il suffit d'évaluer ceci en  $P$  pour obtenir le résultat annoncé.

6. Posons  $Q_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ . Il est clair que  $Q_0 = 1$ ,  $Q_n(0) = 0$ , et un calcul quasi-immédiat montre que  $\Delta Q_n = Q_{n-1}$ . Ainsi, la famille  $(Q_n)$  satisfait les conditions uniques qui définissent la famille  $(H_n)$ . C'est donc que  $Q_n = H_n$  pour tout  $n$ .
7. Il est d'abord clair que  $i. \implies ii.$ . Que  $ii.$  entraîne  $iii.$  résulte du calcul de  $\Delta^n P(0)$  et de la décomposition de  $P$  dans la base  $H_n$ . Remarquons d'autre part que si  $a$  est dans  $\{0, \dots, n-1\}$ ,  $H_n(a) = 0$ , et si  $a \geq n$ ,  $H_n(a) = C_a^n \in \mathbb{Z}$ . Si  $a < 0$ ,  $a$  s'écrit  $-b$  avec  $b > 0$ , et on a  $H_n(a) = (-1)^k C_{b+k-1}^k$ . La décomposition de  $P$  dans la base  $H_n$  fait alors que  $P(a) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ , et on a prouvé l'équivalence des 3 premiers points. Enfin, il est clair que  $i. \implies iv.$  Si  $P$  prend des valeurs entières sur  $\{a, \dots, a+p\}$ , alors  $Q(X) = P(X+a)$  prend des valeurs entières sur  $\{0, \dots, p\}$ , et par l'équivalence des 3 premiers points,  $Q$  prend des valeurs entières sur  $\mathbb{Z}$  tout entier. Il en est de même pour  $P$ .