

EXERCICES - APPLICATIONS LINÉAIRES : ÉTUDES THÉORIQUES :
énoncé

GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 - Avez-vous compris ce qu'étaient le noyau et l'image? - L1/Math Sup -

★

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im} f \subset \ker g.$$

Exercice 2 - Isomorphisme - L1/Math Sup - ★★

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Montrer que G et $\text{Im}(f)$ sont isomorphes.

Exercice 3 - Factorisation d'une application linéaire surjective - L1/L2/Math Sup -

★★

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et f appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.

1. On suppose qu'il existe g appartenant à $\mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = Id_F$. Montrer que f est surjective.
2. On suppose que f est surjective. On admet l'existence d'un sous-espace vectoriel G de E tel que $G \oplus \ker(f) = E$.
 - (a) Soit $\hat{f} : G \rightarrow F, x \mapsto f(x)$. Montrer que \hat{f} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 - (b) Soit $g : F \rightarrow E, y \mapsto \hat{f}^{-1}(y)$. Calculer $f \circ g$.
3. Conclure.

Exercice 4 - Toujours liés - L1/Math Sup - ★★★

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5 - Factorisation et inclusion de noyaux - L1/L2/Math Sup/Math Spé - ★★★

Dans cet exercice, on admet que dans tout espace vectoriel, un sous-espace admet un supplémentaire.

Soient E, F deux espaces vectoriels et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\ker(u) \subset \ker(v) \iff \exists f \in \mathcal{L}(F) \text{ tel que } v = f \circ u.$$

Exercice 6 - Factorisation et inclusion des images - L1/Math Sup - ★★★

Dans cet exercice, on suppose connue la propriété suivante : si E_1 est un espace vectoriel et F_1 est un sous-espace vectoriel de E_1 , alors il possède un supplémentaire. Soient alors E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$;
- (ii) Il existe $w \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $v = u \circ w$.

SYMÉTRIE ET PROJECTIONS

Exercice 7 - Projections - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - ★★

Soit E un K -ev, et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un *projecteur* si $p \circ p = p$.

1. Etude individuelle

- (a) Montrer que pour tout $y \in \text{Im}(p)$, alors $p(y) = y$. En déduire que $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$.
On dit que p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
- (b) On suppose désormais que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle p a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

En déduire que la trace d'un projecteur est égal à son rang.

2. Etude collective. Soient E_1, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \oplus \dots \oplus E_p = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

Exercice 8 - Matrice d'une projection - *L1/Math Sup* - ★★

Soient, dans \mathbb{R}^3 , P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la projection p de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D .

Exercice 9 - Famille de deux projecteurs - *L1/Math Sup* - ★

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 10 - Somme de deux projecteurs - *L1/Math Sup* - ★★

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 11 - Sous-espace stable et projecteur - *L1/Math Sup* - ★★

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. Soit p un projecteur de E . Démontrer que u commute avec p si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par u .

Exercice 12 - Endomorphismes annulant un polynôme de degré 2 - *L1/Math Sup* - ★

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E)$.

On suppose de plus que

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1} .
3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{Id}_E)$.

4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha Id_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta Id_E)$.

Exercice 13 - Base de projecteurs - L2/Math Spé - ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base \mathcal{B} de E . On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base \mathcal{B} d'un projecteur de E .
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.