

EXERCICES - APPLICATIONS LINÉAIRES : ÉTUDES PRATIQUES :
énoncé

APPLICATIONS LINÉAIRES SUR \mathbb{R}^n

Exercice 1 - AL-0 - L1 - *

Soit u l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .
Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et \mathcal{F}_4 .
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de \mathbb{R}^4 .
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 2 - AL-1 - L1 - *

Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = w_1, u(\mathcal{E}_2) = w_2, u(\mathcal{E}_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et \mathcal{E}_3 .
En déduire la matrice de u dans la base canonique.
- (b) Soit $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. (a) Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
- (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.
3. Déterminer $\ker(u - Id)$ et $\text{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de \mathbb{R}^3 . En déduire que $u - Id$ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 - AL-2 - L1 - *

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = -2\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_3, u(\mathcal{E}_2) = 3\mathcal{E}_2, u(\mathcal{E}_3) = -4\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{E}_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\ker u$.
 u est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?
3. Déterminer une base de $\text{Im } u$. Quel est le rang de u ?
4. Montrer que $E = \ker u \oplus \text{Im } u$.

Exercice 4 - - L1/Math Sup - *

On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . En déduire une base de $\text{Im}(f)$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5 - - *L1/Math Sup* - ★

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans lui-même défini par $f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathbb{R}^4 .
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\ker(f)$.

Exercice 6 - Définie par une base - *L1/Math Sup* - ★

On considère dans \mathbb{R}^2 les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

Exercice 7 - A noyau fixé - *L1/Math Sup* - ★★

Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont le noyau est E .

Exercice 8 - Application linéaire à contraintes - *L1/Math Sup* - ★★

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de \mathbb{R}^4 tel que, si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique, alors on a

1. $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.
2. $\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

APPLICATIONS LINÉAIRES ET LEURS MATRICES

Exercice 9 - Donnée par une matrice - *L1/Math Sup* - ★

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

Exercice 10 - Réduction - *L1/Math Sup* - ★

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICES - APPLICATIONS LINÉAIRES : ÉTUDES PRATIQUES :
énoncé

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 11 - Changement de base - L1/Math Sup - *

Soit u l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et (f_1, f_2) celle de \mathbb{R}^2 . On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 puis que (f'_1, f'_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 12 - Changement de base... - L1/Math Sup - *

Soient $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $u(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$ et $v(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x, y, z)$ et $v \circ u(x, y)$.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Montrer que $\mathcal{B}'_2 := \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\}$ et $\mathcal{B}'_3 := \{\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \mathcal{F}'_3\}$ sont des bases de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 resp., où $\mathcal{E}'_1 := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_2 := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}'_1 := \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}'_2 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}'_3 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$.
3. Donner la matrice P de passage de la base \mathcal{B}_2 à la base \mathcal{B}'_2 puis la matrice Q de passage de la base \mathcal{B}_3 à la base \mathcal{B}'_3 .
4. Écrire la matrice de u dans les bases \mathcal{B}'_2 et \mathcal{B}_3 puis dans les bases \mathcal{B}'_2 et \mathcal{B}'_3 et enfin celle de v dans les bases \mathcal{B}'_3 et \mathcal{B}'_2 .

Exercice 13 - Surjective ? - L1/Math Sup - *

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

AUTRES APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 14 - Application linéaire définie sur les matrices - L1/Math Sup - **

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15 - Avec des polynômes - L1/Math Sup - **

Montrer que $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image

Exercice 16 - Applications linéaires dans un espace de polynômes - L1/Math Sup - *

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\text{ker}(u)$.
4. Montrer que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 17 - Variante polynômiale - L1/Math Sup - **

Soit $E = \mathbb{C}[X]$, p un entier naturel et f l'application de E dans E définie par $f(P) = (1 - pX)P + X^2P'$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 18 - Encore des polynômes - L1/Math Sup - **

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
2. Quel est le degré de $f(X^p)$? En déduire $\text{ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. Soit Q un polynôme de $\text{Im}f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 19 - Sur un espace de fonctions sinus/cosinus - L1/Math Sup - *

On note E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui s'écrivent sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ réels.

1. Montrer que E est un espace vectoriel. En donner une base et calculer sa dimension.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application de E dans E . On note D cette application.
3. Rappeler les résultats vus au lycée permettant d'affirmer que D est un endomorphisme.
4. Donner la matrice de D dans la base trouvée en 1.
5. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E , il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$.
6. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D(D^{-1}(u)) = u$ et $D^{-1}(D(u)) = u$.
7. Donner la matrice de D^{-1} dans la base trouvée en 1.

Exercice 20 - Application aux polynômes - 2ème année - ***

Le but de cet exercice est l'étude de l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Question préliminaire : Soit (P_n) une famille de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour chaque n , $\deg(P_n) = n$. Prouver que (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICES - APPLICATIONS LINÉAIRES : ÉTUDES PRATIQUES :
énoncé

2. Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et son image.
3. Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $H_0 = 1$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$, et $H_n(0) = 0$. Montrer que (H_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que P peut s'écrire

$$P = \sum_{n=0}^p (\Delta^n P)(0) H_n.$$

5. Montrer que l'on a $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(k)$.
6. Montrer que pour tout n , $H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.
7. En déduire que, pour tout polynôme P de degré p , les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. P prend des valeurs entières sur \mathbb{Z} .
 - ii. P prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$.
 - iii. Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers.
 - iv. P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.