Corrigé Exercice 2

$u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ .posons $v_n = \ln u_n$, $v_n = \ln\left(\dfrac{a^n}{n^\alpha}\right) = \ln a^n - \ln n^\alpha = n\ln a - \alpha \ln n = n\left(\ln a - \alpha\dfrac{\ln n}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln a - \alpha\dfrac{\ln n}{n}\right) = \ln a$

Donc : 2 cas :

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = +\infty$

Si $a < 1$, $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$.

On conclut que lorsque n tend vers l'infini , le comportement de $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ est celui de a^n pour $a \neq 1$.