

 Institut de Formation Sainte Marie	DEVOIR DE NIVEAU	Année Universitaire : 2023-2024
		Filière : 2 BTS GBAT
		Durée : 02h00mn
CE MATHÉMATIQUES	Date : 09/12/2023	Coefficient : 02

Mathématiques générales

NB : La qualité de la rédaction sera prise en compte.

EXERCICE 1 (12 points)

PARTIE A

On donne l'équation différentielle (E) définie sur $] -\infty; 1[$ par :

(E): $(1 - x)y' - xy = e^{-x}$ où y est la fonction inconnue de la variable réelle x dérivable sur $] -\infty; 1[$ et y' est la fonction dérivée de y .

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. g est la fonction définie et dérivable sur $] -\infty; 1[$ par : $g(x) = \frac{xe^{-x}}{1-x}$

Démontrer que g est une solution particulière de (E).

3. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

4. En déduire la fonction h solution de (E) vérifiant la condition initiale $h(0) = 0$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-x}$ avec (C) sa courbe représentative.

1) Calculer la limite de f à gauche de 1. Interpréter

2) Calculer la limite de f en $-\infty$.

3) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5) Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in] -\infty; 1[$.

6) Déterminer le développement limité de $f(x)$ d'ordre 3 en 0.

7) En déduire l'équation de la tangente (T) à (C) au voisinage de 0.

8) Préciser les positions relatives de (T) et (C).

9) Construire (T) et (C).

EXERCICE 2 (08 points)

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2 cm).

g et h sont des applications définies par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2\ln(x+1)}{x+1} \quad \text{et} \quad h(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$$

PARTIE A

1) Déterminer l'ensemble de définition de h .

2) Calculer $h'(x)$. En déduire que h admet un minimum.

Quel est le signe de $h(x)$.

3) Déterminer l'ensemble de définition de g .

4) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

5) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) représentative de g en $+\infty$. Préciser la position relative de (C) par rapport à (D).

6) Déterminer le développement limité de g au voisinage de 0 à l'ordre 3. En déduire la tangente (T) à (C) en 0 et préciser les positions relatives de (T) et (C) au voisinage de 0.

7) Construire (C) , (T) et (D) .

PARTIE B

1) Déterminer une primitive sur $] -1; +\infty[$ de la fonction f définie pour tout x de $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \ln(x+1)$$

2) En déduire une primitive de g sur $] -1; +\infty[$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par l'axe (O, I) , la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$

NE JAMAIS ABANDONNER !