Tp n° MATHEMATIQUES – INTEGRATIONS BTS-GO 2009-2010

Exercice 1

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\omega x)e^{-px} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\omega x)e^{-px} = 0$, pour tous réels $\omega \neq 0$ et $p > 0$.

1. Calculer l'intégrale $J(x) = \int_0^x \sin(t)e^{-pt}dt$ et en déduire la valeur de $I(x) = \int_0^x \cos(t)e^{-pt}dt$,

   En déduire l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt}dt$ et l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt}dt$

2. Calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt}dt$, puis l'intégrale $J(x) = \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt}dt$

   Vérifier que $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}dt = \dfrac{p}{\omega}\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt}dt$.(on posera $u' = \cos \omega t$ et $v = e^{-pt}$)

   En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}dt$ et de $J = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt}dt$.

3. Calculer $A(x) = \int_0^x t\, e^{-pt}dt$, $B(x) = \int_0^x t^2 e^{-pt}dt$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\, e^{-pt}dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t^2\, e^{-pt}dt$.

   Peut-on généraliser ces résultats ? $I_n(x) = \int_0^x t^n\, e^{-pt}dt$ et $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-pt}dt$

Exercice 2.

On considère le signal électrique représenté par la fonction numérique φ de la variable réelle t, paire , périodique de période 2π et telle que : $\varphi(t) = \pi^2 - 2\pi t$ si $t \in [0;\pi/2]$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \in]\pi/2;\pi]$.
et dont la courbe représentée ci-dessous sur l'intervalle $t \in [-5\pi/2;5\pi/2]$.

1°. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique1 cm), la courbe représentative de *f* sur $[-5\pi/2;5\pi/2]$

2°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. à l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de *n* : $I = \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t)\cos(nt)dt$.

3°. a. on donne $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t)\sin(nt)dt$ Pour $n \geq 1$, donner la valeur de b_n.

b. on donne $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t)dt$ et $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t)\cos(nt)dt$ .Calculer a_0 et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que, pour $p \geq 1$ on a : $a_{2p} = \dfrac{1-(-1)^p}{p^2}$.

d. En déduire , pour $k > 0$, la valeur de a_{4k} et de a_{4k+2} en fonction de k.

e. Calculer a_{2p+1} en fonction p.

Exercice-3

Soit la fonction numérique *f* de la variable réelle t telle que : $\begin{cases} f \text{ est impaire et de période } 2\pi \\ f(t) = 1 - \cos 2t \quad si\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

1) Etudier les variations de *f* sur [0 ; π]. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique1 cm), la courbe représentative de *f* sur [-2π ; 2π].
2) Calculer la valeur efficace, E_f, de la fonction *f*.
3) On admet que, pour tout réel t, les nombres a_0, a_n et b_n sont définies par :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

a) Calculer a_0 . Justifier que, pour $n \geq 0$, $a_n = 0$

b) Calculer b_2.

c) Calculer b_n pour $n \geq 1$ et $n \neq 2$. (on précisera le résultat suivant la parité de *n*).

d) Calculer b_1 ; b_3 ; b_5 et b_7

Exercice 4

1°) Soit *n* entier naturel non nul. On pose : $I_n = \int_0^{\pi} (t-\pi)^2\cos(nt)dt$ et $J_n = \int_0^{\pi} (t-\pi)\sin(nt)dt$

Montrer en intégrant par parties, que : $J_n = -\frac{\pi}{n}$ et $I_n = \frac{2\pi}{n^2}$

2°) On considère un signal périodique modélisé par la fonction $t \mapsto u(t)$, de période 2π ,paire et définie par : $u(t) = (t-\pi)^2$ pour $t \in [0;\pi]$

a) Tracer dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ la représentation graphique de la fonction *u*, pour *t* variant entre -2π et 6π .

b) Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(nt)dt$.

3°) On suppose désormais que le signal *u* est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique.

Le carré de la tension efficace est donnée par la formule : $U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2(t)dt$

Calculer U_{eff} et donner une approximation décimale à 10^{-3} près.

Exercice 5

1- Soit *n* un entier naturel. On appelle I_n l'intégrale : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2nt)dt$

Calculer I_n. Vérifier que $I_n = \frac{1}{1-4n^2}$.

2 - On considère un signal modélisé par la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = |\sin t|$.

a) Montrer que la fonction u est π -périodique et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction u, pour $t \in [-\pi, 2\pi]$ (unité graphique : 2 cm).

c) On note $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t)\cos(2nt)\,dt$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t)\sin(2nt)\,dt$. Prouver, sans calcul, que $b_n = 0$.

Calculer a_0 et a_n .

3 - On suppose que le signal u est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique.

On note U_{eff} la tension efficace associée à u . Le carré de U_{eff} est alors : $U^2{}_{eff} = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/2} u^2(t)$

Calculer U_{eff} .

Exercice 6

Soit la fonction *f* de la variable réelle t définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t-1 \text{ pour } t \in [0;2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$$

1° Représenter graphiquement *f* sur [– 2, 6[.

2° soit $f_e{}^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f^2(t)dt$ .Calculer f_e la valeur efficace de *f*.

3° On donne $a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t-1)\cos n\omega t dt$ et $b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t-1)\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$

a) Donner la valeur de b_n .

b) Calculer a_0 et, pour $n \geq 1$, a_n (Préciser les valeurs de a_{2p} et de a_{2p+1}).

Correction

Exercice 1

$J(x)=\int_0^x \sin(t)e^{-pt}dt=\left[-\cos(t)e^{-pt}\right]_0^x-p\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt$. $J(x)=-\cos(x)e^{-px}+1-p\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt$

$I(x)=\int_0^x \cos(t)e^{-pt}dt=\left[\sin(t)e^{-pt}\right]_0^x+p\int_0^x\sin(t)e^{-pt}dt=\sin(x)e^{-px}+p\int_0^x\sin(t)e^{-pt}dt$

$\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt=\sin(x)e^{-px}-p\cos(x)e^{-px}+p-p^2\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt$

$\left(1+p^2\right)\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt=\sin(x)e^{-px}-p\cos(x)e^{-px}+p \Leftrightarrow \left(1+p^2\right)\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=p$

$\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt=\left(\sin(x)e^{-px}-p\cos(x)e^{-px}+p\right)\times\frac{1}{p^2+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt\right)=\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin(x)e^{-px}-p\cos(x)e^{-px}+p\right)\times\frac{1}{p^2+1}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin(x)e^{-px}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-p\cos(x)e^{-px}\right)=0$. Donc $\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=\left(p\right)\times\frac{1}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}$

Soit $p>0$. l'égalité $I(x)=\int_0^x\cos(t)e^{-pt}dt=\sin(x)e^{-px}+p\int_0^x\sin(t)e^{-pt}dt$

donc $\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=p\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt$, on en déduit : $\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\times\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}$

$J(x)=\int_0^x\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)e^{-pt}\right]_0^x-\frac{p}{\omega}\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt$. $J(x)=-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)e^{-px}+\frac{1}{\omega}-\frac{p}{\omega}\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt$

$I(x)=\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)e^{-pt}\right]_0^x+\frac{p}{\omega}\int_0^x\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}+\frac{p}{\omega}\int_0^x\sin(\omega t)e^{-pt}dt$

$\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}-\frac{p}{\omega^2}\cos(\omega x)e^{-px}+\frac{p}{\omega^2}-\frac{p^2}{\omega^2}\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt$

$\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right)\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}-\frac{p}{\omega^2}\cos(\omega x)e^{-px}+\frac{p}{\omega^2}\Leftrightarrow\frac{\omega^2+p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{p}{\omega^2}$

$\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}-\frac{p}{\omega^2}\cos(\omega x)e^{-px}+\frac{p}{\omega^2}\right)\times\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt\right)=\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}-\frac{p}{\omega^2}\cos(\omega x)e^{-px}+\frac{p}{\omega^2}\right)\times\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{p}{\omega^2}\cos(\omega x)e^{-px}\right)=0$. Donc $\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\left(\frac{p}{\omega^2}\right)\times\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Soient $\omega\neq 0$ et $p>0$. l'égalité

$I(x)=\int_0^x\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)e^{-px}+\frac{p}{\omega}\int_0^x\sin(\omega t)e^{-pt}dt$ donc $\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt$,

on en déduit : $\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{\omega}{p}\times\frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

c. $\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i\omega)t}+e^{-(p+i\omega)t}dt$

$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right]=\frac{1}{2}\frac{p+i\omega+p-i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+\omega^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$

d. $\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i\omega)t}-e^{-(p+i\omega)t}dt$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right]=\frac{1}{2i}\frac{p+i\omega-p+i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

e. $\int_0^{+\infty}e^te^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{(1-p)t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-1)t}dt=\left[\frac{1}{p-1}e^{-(p-1)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p-1}$ avec $\operatorname{Re}(p)>1$

f . $\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)t}dt=\left[-\frac{1}{p+1}e^{-(p+1)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p+1}$.

3. a. $f(t)=\cos t$: $\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{it}+e^{-it})e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i)t}+e^{-(p+i)t}dt$ pour $R_e(p)>0$

$$\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right]=\frac{1}{2}\frac{p+i+p-i}{p^2+1}=\frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}$$

b. $g(t)=\sin t$: $\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{it}-e^{-it})e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i)t}-e^{-(p+i)t}dt$ pour $R_e(p)>0$

$$\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right]=\frac{1}{2i}\frac{p+i-p+i}{p^2+1}=\frac{1}{2i}\frac{2i}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}.$$

Fonctions puissances $t\mapsto t^n$ ***(*** $n\in N^*$***)***

n = 1 Considérons la fonction $f_1(t)=t\,U(t)$, on obtient : $\int_0^{+\infty}t\,e^{-pt}dt$

On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t)=t$ et $v'(t)=e^{-pt}$, on obtient : $u'(t)=1$ et $v(t)=-\frac{1}{p}e^{-pt}$ d'où (si $p\neq 0$). $\int_0^x t\,e^{-pt}dt=\left[\frac{-te^{-pt}}{p}\right]_0^x+\frac{1}{p}\int_0^x e^{-pt}dt=\left[\frac{-te^{-pt}}{p}-\frac{1}{p}\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^x=e^{-px}\left(\frac{-x}{p}-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{1}{p^2}$.

On obtient pour $p>0$: $\int_0^{+\infty}t\,e^{-pt}dt=\frac{1}{p^2}$.

n = 2 : $\int_0^{+\infty}t^2e^{-pt}dt$. On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t)=t^2$ et $v'(t)=e^{-pt}$, on obtient : $u'(t)=t$ et $v(t)=-\frac{1}{p}e^{-pt}$ d'où (si $p\neq 0$).

$\int_0^x t^2e^{-pt}dt=\left[\frac{-t^2e^{-pt}}{p}\right]_0^x+\frac{2}{p}\int_0^x te^{-pt}dt=\left[\frac{-t^2e^{-pt}}{p}\right]_0^x+\frac{2}{p}\int_0^x te^{-pt}dt$, on remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-px}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t\,e^{-pt}dt=\frac{1}{p^2}$ d'où : $\int_0^{+\infty}t^2e^{-pt}dt=\frac{2}{p^3}$.

On sait déjà que pour $p>0$, $F_0(p)=\frac{1}{p}$; $F_1(p)=\frac{1}{p^2}$ et $F_2(p)=\frac{2}{p^3}$ .On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t)=t^n$ et $v'(t)=e^{-pt}$, on obtient : $u'(t)=nt^{n-1}$ et $v(t)=-\frac{1}{p}e^{-pt}$ d'où (si $p\neq 0$).

$I_n(x)=\int_0^x t^ne^{-pt}dt=\left[\frac{-t^ne^{-pt}}{p}\right]_0^x+\frac{n}{p}\int_0^x t^{n-1}e^{-pt}dt=\frac{-x^ne^{-px}}{p}+\frac{n}{p}\int_0^x t^{n-1}e^{-pt}dt$; si $p>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-px}=0$

Donc l'intégrale $F_n(p)=\int_0^{+\infty}t^ne^{-pt}dt$ est convergente et $\lim\limits_{x\to+\infty}I_n(x)=F_n(p)$.

supposons désormais $p>0$. $F_n(p)=\frac{n}{p}F_{n-1}(p)$ et $F_{n-1}(p)=\frac{n-2}{p}F_{n-2}(p$; $F_{n-2}(p)=\frac{n-2}{p}F_{n-3}(p$,…………

$F_3(p)=\frac{3}{p}F_2(p)$ et $F_2(p)=\frac{2}{p}F_1(p)=\frac{2}{p^3}$ donc on déduit de proche en proche que

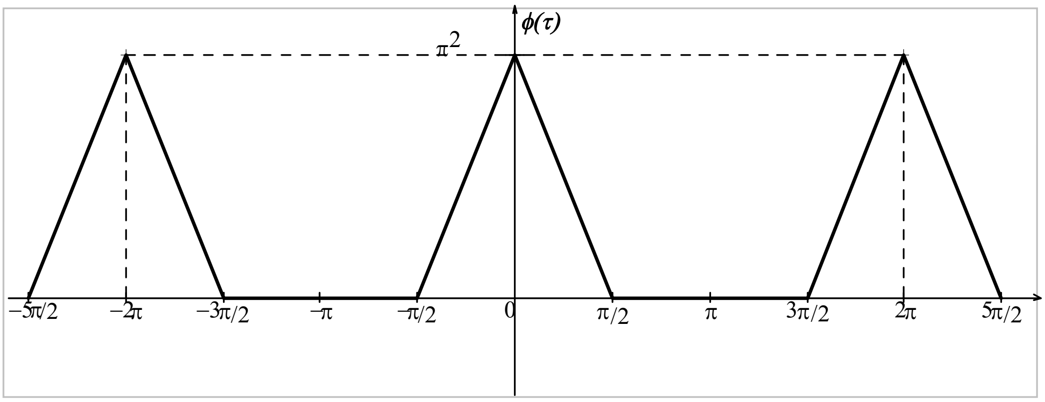
$F_n(p)=\dfrac{n}{p}\times\dfrac{(n-1)}{p}\times\dfrac{(n-2)}{p}\times\dfrac{3}{p}\times\dfrac{2}{p}F_1(p)$, donc pour tout $p>0$, $F_n(p)=\dfrac{n}{p}\times\dfrac{(n-1)}{p}\times\dfrac{(n-2)}{p}\times\dfrac{3}{p}\times\dfrac{2}{p}\times\dfrac{1}{p^2}$

On admet que $n(n-1)(n-2).....3\times2\times1=n!$ (factoriel n). Nous admettrons qu'on obtient ainsi de proche en proche les transformées de Laplace des fonctions $t\mapsto t^n$ .On conclut que $F_n(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$. $n\in N$.

$F_n(p+a)=\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$; $p+a>0$ $n\in\mathbb{N}$ et $n=1$: $F_1(p+a)=\dfrac{1}{(p+a)^2}$.

Exercice 2

1°.



2°. On pose $u(t)=\pi^2-2\pi t$; $u(t)=-2\pi$ et $v'(t)=\cos(nt)$; $v'(t)=\dfrac{\sin(nt)}{n}$

$$I=\int_0^{\pi/2}(\pi^2-2\pi t)\cos\left(nt\right)dt=\left[\frac{(\pi^2-2\pi t)\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}(-2\pi)(\sin(nt))dt$$

$$I=0+\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}2\pi\sin(nt)dt=\frac{2\pi}{n}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2}=\frac{2\pi}{n^2}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

3°. La fonction *f* est paire donc $b_n=0$ .Or $\varphi(t)=0$ si $t\in[-\pi;-\pi/2[\cup]\pi/2;\pi]$,

b. $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2}\varphi(t)dt+\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\varphi(t)dt+\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)dt+\dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\varphi(t)dt$

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\pi^2-2\pi t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\pi^2-2\pi t)dt=\frac{1}{\pi}\left[\pi^2t-\pi t^2\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{4}\right]=\frac{\pi^2}{4}$$

c. $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos(nt)dt=\dfrac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2}\varphi(t)\cos(nt)dt+\int_{-\pi/2}^{0}\varphi(t)\cos(nt)dt+\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\cos(nt)dt+\int_{\pi/2}^{\pi}\varphi(t)\cos(nt)dt\right)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\pi^2-2\pi t)\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\pi^2-2\pi t)\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}I=\frac{2}{\pi}\times\frac{2\pi}{n^2}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)=\frac{4}{n^2}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

d. Si n est pair on a : $a_{2p}=\dfrac{4}{(2p)^2}\left(1-\cos\left(p\pi\right)\right)=\dfrac{1}{p^2}(1-(-1)^p)$

e. $a_{4k}=\dfrac{4}{(4k)^2}\left(1-\cos\left(2k\pi\right)\right)=0$ et $a_{4k+2}=\dfrac{4}{(4k+2)^2}\left(1-\cos\left(\dfrac{4k+2}{2}\pi\right)\right)=\dfrac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\cos\left((2k+1)\pi\right)\right)=\dfrac{2}{(2k+1)^2}$

f. $a_{2p+1}=\dfrac{4}{(2p+1)^2}\left(1-\cos\left(\dfrac{2p+1}{2}\pi\right)\right)=\dfrac{4}{(2p+1)^2}\left(1-\cos\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\dfrac{4}{(2p+1)^2}$.

Exercice 3

1. *f* est dérivable sur $[0;\pi]$ et $f'(t)=2\sin(2t)$

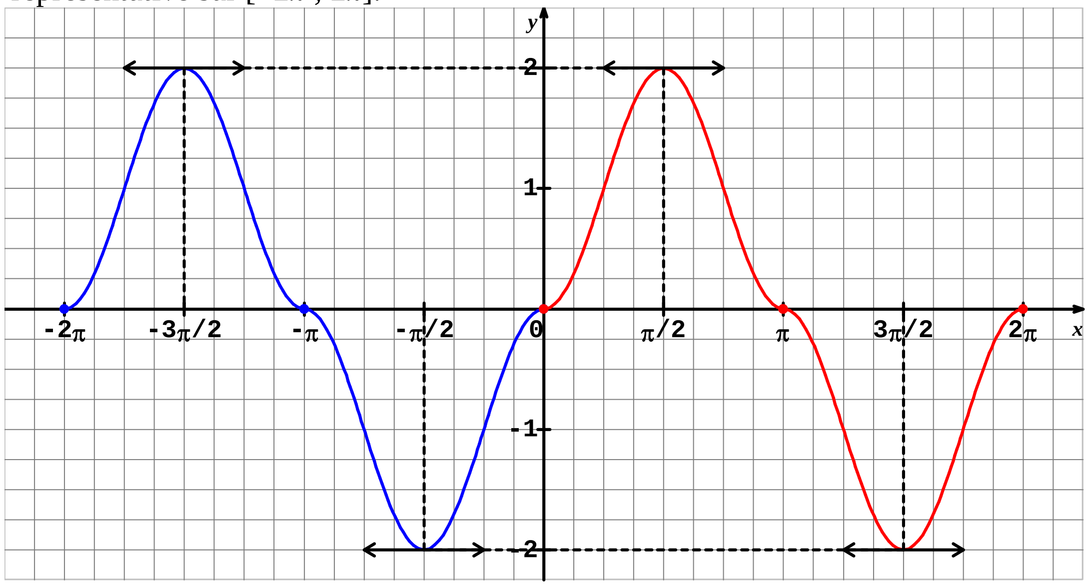
$f'(t)=0$ équivaut à $\sin2t=0$ $\sin2t=\sin0$ $t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in Z$ donc $t=\dfrac{\pi}{2}$ sur $[0;\pi]$.

Si $t\in[0;\pi/2]$ $2t\in[0;\pi]$ et $\sin(2t)\geq0$ sur $[0;\pi]$ donc $\sin(2t)\geq0$ sur $[0;\pi/2]$.

Si $t\in[\pi/2;\pi]$ $2t\in[\pi;2\pi]$ et $\sin(2t)\leq0$ sur $[\pi;2\pi]$ donc $\sin(2t)\leq0$ sur $[\pi/2;\pi]$

t	0		$\pi/2$		π
$f'(t)$	0	$+$		$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Courbe représentative sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.



2. $E_f^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2t\right)^2 dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2t+\dfrac{1+\cos 4t}{2}\right)dt$

$E_f^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2t+\dfrac{1+\cos 4t}{2}\right)dt = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{3}{2}t-\sin(2t)+\dfrac{1}{8}\cos 4t\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{3}{2}$ donc $E_f = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

3. $I = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt = \dfrac{1}{\pi}\left[t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\times\pi = \dfrac{1}{2}$

$a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} -f(-t)dt + \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = -\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt + \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = 0$

f est une fonction impaire donc tous les a_n sont nuls.

b. $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\left(nt\right)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(nt\right)dt$

$b_2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1-\cos(2t))\sin\left(2t\right)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(2t\right)dt - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2t)\sin\left(2t\right)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(2t\right)dt - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin\left(4t\right)}{2}dt$

$b_2 = \dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{1}{2}\cos(2t)+\dfrac{1}{8}\cos(4t)\right]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\right) = 0$

c. soit $n\geq 1$ et $n\neq 2$: $\sin(nt)\cos(mt) = \dfrac{1}{2}[\sin((n+m)t+\sin(n-m)t]$

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1-\cos(2t))\sin\left(nt\right)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(nt\right)dt - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2t)\sin\left(nt\right)dt$

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\left(nt\right)dt - \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+2)t+\sin(n-2)t\right]dt$

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\left[-\dfrac{2}{n}\cos(nt)+\dfrac{1}{(n+2)}\cos((n+2)t)+\dfrac{1}{(n-2)}\cos((n-2)t)\right]_0^{\pi}$

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{-1}{n}(\cos(n\pi)-1)\right)+\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{(n+2)}\cos(n+2)\pi+\dfrac{1}{(n-2)}\cos(n-2)\pi\right)-\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{(n+2)}\cos 0+\dfrac{1}{(n-2)}\cos 0\right)$

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{-1}{n}\left((-1)^n-1\right)\right)+\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+2)}+\dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-2)}\right)-\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{(n+2)}+\dfrac{1}{(n-2)}\right)$

Si n est pair $\quad b_{2p}=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{-1}{2p}\left(\left(-1\right)^{2p}-1\right)}_{0}\right)+\underbrace{\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(2p+2)}+\frac{1}{(2p-2)}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(2p+2)}+\frac{1}{(2p-2)}\right)}_{0}=0$

Si n est impair $\quad n=2p+1$

$$b_{2p+1}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{(2p+1)}\left(\left(-1\right)^{2p+1}-1\right)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\left(-1\right)^{2p+3}}{2p+3}+\frac{\left(-1\right)^{2p-1}}{2p-1}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(2p+3)}+\frac{1}{(2p-1)}\right)=\frac{4}{(2p+1)\pi}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2p+3}+\frac{2}{2p-1}\right)$$

$$=\frac{4}{(2p+1)\pi}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{2(2p-1)+2(2p+3)}{\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)}\right)=\frac{4}{(2p+1)\pi}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{4p-2+4p+6)}{\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)}\right)=\frac{4}{(2p+1)\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{2p+1}{\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)}\right)$$

$$=\frac{4\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)}{(2p+1)\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)\pi}-\frac{4\left(2p+1\right)^2}{(2p+1)\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)\pi}=4\frac{\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)-\left(2p+1\right)^2}{(2p+1)\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)\pi}=4\frac{4p^2+4p-3-4p^2-4p-1}{(2p+1)\left(2p+3\right)\left(2p-1\right)\pi}$$

$$b_{2p+1}=\frac{-16}{(2p+1)\pi\left((2p+1)^2-4\right)}$$

4. $b_1=\frac{-16}{\pi\left(1-4\right)}=\frac{16}{3\pi}$; $b_3=\frac{-16}{3\pi\left(9-4\right)}=\frac{-16}{15\pi}$; $b_5=\frac{-16}{5\pi\left(25-4\right)}=\frac{-16}{105\pi}$; $b_7=\frac{-16}{7\pi\left(49-4\right)}=\frac{-16}{315\pi}$

Exercice 4

1. Soit n un entier naturel non nul . $I_n=\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt$. on effectue une intégration par parties :

$u(t)=t-\pi$; $u'(t)=1$ et $v'(t)=\sin(nt)$; $v(t)=-\frac{1}{n}\cos(nt)$, donc pour tout $n\geq 1$, on a :

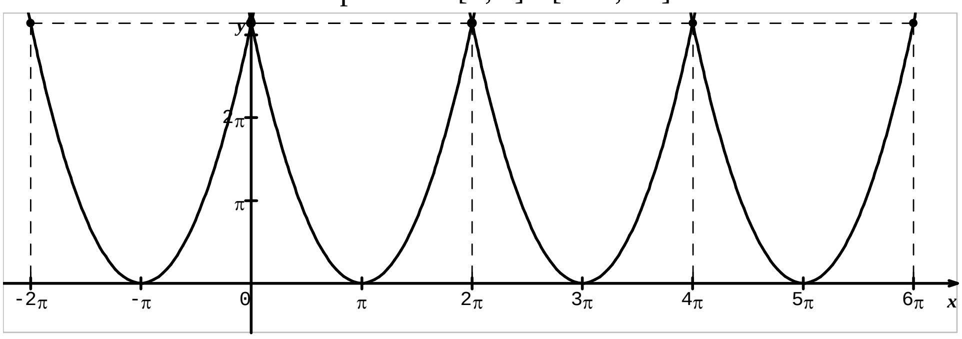
$$I_n=\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt=\left[-\frac{(t-\pi)\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt=0-\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\left[\sin(nt)\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{n}\quad .\ I_n=-\frac{\pi}{n}.$$

$A_n=\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)dt$. on effectue une intégration par parties :

$u(t)=\left(t-\pi\right)^2$; $u'(t)=2\left(t-\pi\right)$ et $v'(t)=\cos(nt)$; $v(t)=\frac{1}{n}\sin(nt)$, donc pour tout $n\geq 1$, on a :

$$A_n=\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)dt=\left[\frac{(t-\pi)^2\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}2(t-\pi)\sin(nt)dt=-\frac{2}{n}I_n\text{, donc } A_n=\frac{2\pi}{n^2}.$$

2.a) pour la représentation graphique de la fonction u sur $[-2\pi;6\pi]$, on trace d'abord l'arc de la parabole correspondant à l'intervalle $[0;\pi]$ sur lequel $u(t)$ est un polynôme du second degré du type x^2 avec $x=t-\pi$.
u étant paire , on obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées l'arc de parabole correspondant à l'intervalle $[-\pi;0]$. u admettant pour période 2π , par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ on passe de l'intervalle $[-\pi;\pi]$à $[-\pi+2\pi;\pi+2\pi]$= $[\pi;3\pi]$puis de $[\pi;3\pi]$à $[3\pi;5\pi]$et on complète jusqu'à 6π .
De même par translation de vecteur $-2\pi\vec{i}$ on passe de $[0;\pi]$à $[-2\pi;-\pi]$.



b/ $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)dt$. on lit sur le formulaire : $a_0=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)dt$ pour une fonction périodique, de période T.

ici $T=2\pi$ et $a=-\pi$; u étant paire donc $\int_{-\pi}^{0}u(t)dt=\int_{0}^{\pi}u(t)dt$, donc $a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}u(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)dt$

Donc $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}(t-\pi)^3\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}$ .d'où $a_0=\frac{\pi^2}{3}$.

On calcule de même $a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos(n\omega t)dt$ .pour tout entier non nul .

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos(n\omega t)dt$; $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos(n\omega t)dt$, car les fonctions u et cos sont paires, il en est de même pour $t\mapsto u(t)\cos nt$ .donc $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\cos(n\omega t)dt$ car $u(t)=(t-\pi)^2$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Donc $a_n=\frac{2}{\pi}A_n$ où $A_n=\frac{2\pi}{n^2}$ d'après 1°. Donc $a_n=\frac{4}{n^2}$ pour tout n entier naturel $n\geq 1$.

La fonction u étant paire , $b_n=0$ pour tout n entier naturel $n\geq 1$.

3. $U_{eff}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2(t)dt$, la fonction u étant paire , il en est de même de la fonction u^2 .donc

$U_{eff}^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u^2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^4dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(t-\pi)^5}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^5}{5\pi}=\frac{\pi^4}{5}$; $U_{eff}^2\approx 19,483$.

Exercice 5

1.) $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx$, ($n\in N$). on sait que : $\sin(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}[\sin((m+n)x+\sin(m-n)x]$

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x\right)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\sin(1+2n)x-\sin(2n-1)x\right)dx$$

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx=\frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)\cos(1+2n)x+\left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)x\right)\right]_0^{\pi/2}$$

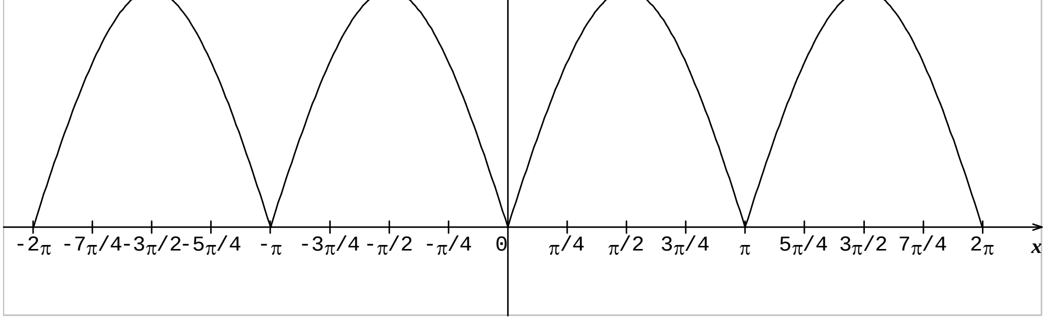
$$I_n=\frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)\cos(1+2n)\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)-\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)\cos(1+2n)0+\left(\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-1)0\right)\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(1+2n)\frac{\pi}{2}&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos n\pi-sin\frac{\pi}{2}\sin n\pi=0\\ \cos(2n-1)\frac{\pi}{2}&=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos n\pi\cos\frac{\pi}{2}+\sin n\pi\sin\frac{\pi}{2}=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\cos(1+2n)\frac{\pi}{2}=\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}=0$$

$$I_n=\frac{1}{2}\left[-\left(\left(\frac{-1}{1+2n}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\frac{2n-1-(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}\frac{-2}{4n^2-1}=\frac{1}{1-4n^2}.$$

2. $u(t+\pi)=\left|\sin(t+\pi)\right|=\left|-\sin t\right|=\left|\sin t\right|=u(t)$ et $u(-t)=\left|\sin(-t)\right|=\left|-\sin t\right|=\left|\sin t\right|=u(t)$; Donc u est bien $\pi-$périodique et paire.

b. lorsque $t\in[0;\pi]$: $u(t)=\left|\sin t\right|=\sin t$ puisque $\sin t>0$ sur $[0;\pi]$.sur cet intervalle la courbe C associée à u est la courbe représentative de la fonction sinus .comme u est $\pi-$périodique, la courbe représentative sur $[-\pi;2\pi]$ est obtenue par translation de $\pi\vec{i}$ puis de $-\pi\vec{i}$ de l'élément C.



c. comme la fonction u est paire , on a donc $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin t\right| dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin t dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t dt = \frac{1}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}$$ puisque la fonction *f* est paire

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\sin t\right|\cos(2nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(2\int_0^{\pi/2}\sin t\cos(2nt)\,dt\right)$$ puisque la fonction à intégrer est paire .

Donc $a_n = \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{1-4n^2}$.

b. $a_0 = \frac{2}{\pi}$; $a_1 = \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{1-4} = \frac{-4}{3\pi}$; $a_2 = \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{1-16} = \frac{-4}{15\pi}$; $a_3 = \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{1-36} = \frac{-4}{35\pi}$

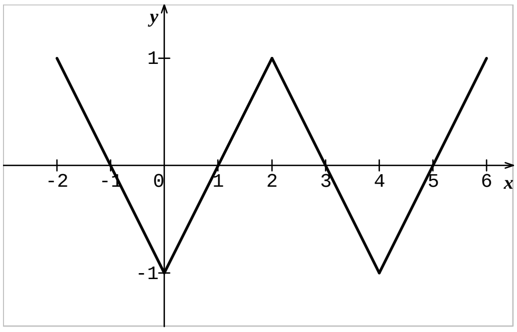
$a_4 = \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{1-64} = \frac{-4}{63\pi}$.

3. $U_e^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

soit *f* la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t-1 \text{ pour } t\in[0;2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$$



2°)

$$f_e^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f^2(t)dt = \frac{2}{4}\int_0^2 f^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

3°) a. puisque *f* est une fonction paire, b_n est nul.

b. on a : $a_0 = \frac{1}{4}\times 2\int_0^2 (t-1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(1-1) = 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(t-1)\cos n\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt = \int_0^2 (t-1)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$.

On intègre par parties, en posant : $u(t) = t-1$; $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)t$, $v(t) = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)t$.

$$a_n = \int_0^2 (t-1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = \left[\frac{2(t-1)}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = 0 - \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

Deux cas :

1. n est pair, on pose $n = 2p$ où $n\in\mathrm{N}$ $a_{2p} = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(2p\pi)-1\right) = 0$.
2. n est impair, on pose $n = 2p+1$ où $n\in\mathrm{N}$

$$a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}\left(\cos((2p+1)\pi)-1\right) = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}(-1-1) = -\frac{8}{(2p+1)^2\pi^2}.$$