

## Tp n° MATHEMATIQUES – INTEGRATIONS BTS-GO 2009-2010

### Exercice 1

On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\omega x)e^{-px} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\omega x)e^{-px} = 0$ , pour tous réels  $\omega \neq 0$  et  $p > 0$ .

1. Calculer l'intégrale  $J(x) = \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt$  et en déduire la valeur de  $I(x) = \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt$ ,

En déduire l'intégrale  $J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt} dt$  et l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt$

2. Calculer l'intégrale  $I(x) = \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt$ , puis l'intégrale  $J(x) = \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt$

Vérifier que  $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{p}{\omega} \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt$ . (on posera  $u' = \cos \omega t$  et  $v = e^{-pt}$ )

En déduire la valeur de  $I = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt$  et de  $J = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt$ .

3. Calculer  $A(x) = \int_0^x t e^{-pt} dt$ ,  $B(x) = \int_0^x t^2 e^{-pt} dt$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t e^{-pt} dt$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 e^{-pt} dt$ .

Peut-on généraliser ces résultats ?  $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-pt} dt$  et  $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt$

### Exercice 2.

On considère le signal électrique représenté par la fonction numérique  $\varphi$  de la variable réelle  $t$ , paire, périodique de période  $2\pi$  et telle que :  $\varphi(t) = \pi^2 - 2\pi t$  si  $t \in [0; \pi/2]$  et  $\varphi(t) = 0$  si  $t \in ]\pi/2; \pi]$ , et dont la courbe représentée ci-dessous sur l'intervalle  $t \in [-5\pi/2; 5\pi/2]$ .

1°. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  unité graphique 1 cm), la courbe représentative de  $f$  sur  $[-5\pi/2; 5\pi/2]$

2°. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . à l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de  $n$  :  $I = \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt$ .

3°. a. on donne  $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t) \sin(nt) dt$  Pour  $n \geq 1$ , donner la valeur de  $b_n$ .

b. on donne  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t) dt$  et  $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt$ . Calculer  $a_0$  et  $a_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c. Montrer que, pour  $p \geq 1$  on a :  $a_{2p} = \frac{1 - (-1)^p}{p^2}$ .

d. En déduire, pour  $k > 0$ , la valeur de  $a_{4k}$  et de  $a_{4k+2}$  en fonction de  $k$ .

e. Calculer  $a_{2p+1}$  en fonction  $p$ .

### Exercice-3

Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $t$  telle que :  $\begin{cases} f \text{ est impaire et de période } 2\pi \\ f(t) = 1 - \cos 2t \text{ si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

1) Etudier les variations de  $f$  sur  $[0; \pi]$ . Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  unité graphique 1 cm), la courbe représentative de  $f$  sur  $[-2\pi; 2\pi]$ .

2) Calculer la valeur efficace,  $E_f$ , de la fonction  $f$ .

3) On admet que, pour tout réel  $t$ , les nombres  $a_0, a_n$  et  $b_n$  sont définies par :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt ; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

a) Calculer  $a_0$ . Justifier que, pour  $n \geq 0$ ,  $a_n = 0$

b) Calculer  $b_2$ .

c) Calculer  $b_n$  pour  $n \geq 1$  et  $n \neq 2$ . (on précisera le résultat suivant la parité de  $n$ ).

d) Calculer  $b_1$ ;  $b_3$ ;  $b_5$  et  $b_7$

### Exercice 4

1°) Soit  $n$  entier naturel non nul. On pose :  $I_n = \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(nt) dt$  et  $J_n = \int_0^{\pi} (t - \pi) \sin(nt) dt$

Montrer en intégrant par parties, que :  $J_n = -\frac{\pi}{n}$  et  $I_n = \frac{2\pi}{n^2}$

2°) On considère un signal périodique modélisé par la fonction  $t \mapsto u(t)$ , de période  $2\pi$ , paire et définie par :  $u(t) = (t - \pi)^2$  pour  $t \in [0; \pi]$

a) Tracer dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la représentation graphique de la fonction  $u$ , pour  $t$  variant entre  $-2\pi$  et  $6\pi$ .

b) Calculer  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt$  ;  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(nt) dt$ .

3°) On suppose désormais que le signal  $u$  est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique.

Le carré de la tension efficace est donnée par la formule :  $U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2(t) dt$

Calculer  $U_{eff}$  et donner une approximation décimale à  $10^{-3}$  près.



### Exercice 5

1- Soit  $n$  un entier naturel. On appelle  $I_n$  l'intégrale :  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2nt) dt$

Calculer  $I_n$ . Vérifier que  $I_n = \frac{1}{1-4n^2}$ .

2 - On considère un signal modélisé par la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(t) = |\sin t|$ .

a) Montrer que la fonction  $u$  est  $\pi$ -périodique et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction  $u$ , pour  $t \in [-\pi, 2\pi]$  (unité graphique : 2 cm).

c) On note  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t) \cos(2nt) dt$  et  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t) \sin(2nt) dt$ . Prouver, sans calcul, que  $b_n = 0$ .

Calculer  $a_0$  et  $a_n$ .

3 - On suppose que le signal  $u$  est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique.

On note  $U_{eff}$  la tension efficace associée à  $u$ . Le carré de  $U_{eff}$  est alors :  $U_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/2} u^2(t) dt$

Calculer  $U_{eff}$ .

### Exercice 6

Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $t$  définie par :

1° Représenter graphiquement  $f$  sur  $[-2, 6]$ .

2° soit  $f_e^2 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f^2(t) dt$ . Calculer  $f_e$  la valeur efficace de  $f$ .

3° On donne  $a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (t-1) \cos n\omega t dt$  et  $b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (t-1) \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$

a) Donner la valeur de  $b_n$ .

b) Calculer  $a_0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n$  (Préciser les valeurs de  $a_{2p}$  et de  $a_{2p+1}$ ).

$$\begin{cases} f(t) = t - 1 \text{ pour } t \in [0; 2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$$

## Correction

### Exercice 1

$$J(x) = \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt = \left[ -\cos(t)e^{-pt} \right]_0^x - p \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt. \quad J(x) = -\cos(x)e^{-px} + 1 - p \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt$$

$$I(x) = \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \left[ \sin(t)e^{-pt} \right]_0^x + p \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} + p \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt$$

$$\int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p - p^2 \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt$$

$$\left(1 + p^2\right) \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p \Leftrightarrow \left(1 + p^2\right) \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = p$$

$$\int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \left( \sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p \right) \times \frac{1}{p^2 + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt \right) = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin(x)e^{-px} - p \cos(x)e^{-px} + p \right) \times \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin(x)e^{-px} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -p \cos(x)e^{-px} \right) = 0. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = (p) \times \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$\text{Soit } p > 0. \text{ l'égalité } I(x) = \int_0^x \cos(t)e^{-pt} dt = \sin(x)e^{-px} + p \int_0^x \sin(t)e^{-pt} dt$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-pt} dt = p \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt} dt, \text{ on en déduit : } \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \times \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$J(x) = \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \left[ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t)e^{-pt} \right]_0^x - \frac{p}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt. \quad J(x) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt$$

$$I(x) = \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \left[ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)e^{-pt} \right]_0^x + \frac{p}{\omega} \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega} \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt$$

$$\int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} - \frac{p^2}{\omega^2} \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt$$

$$\left(1 + \frac{p^2}{\omega^2}\right) \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} \Leftrightarrow \frac{\omega^2 + p^2}{\omega^2} \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{p}{\omega^2}$$

$$\int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \left( \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} \right) \times \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt \right) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} - \frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega^2} \right) \times \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{p}{\omega^2} \cos(\omega x)e^{-px} \right) = 0. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \left( \frac{p}{\omega^2} \right) \times \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Soient  $\omega \neq 0$  et  $p > 0$ . l'égalité

$$I(x) = \int_0^x \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)e^{-px} + \frac{p}{\omega} \int_0^x \sin(\omega t)e^{-pt} dt \text{ donc } \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{p}{\omega} \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt,$$

$$\text{on en déduit : } \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p} \times \frac{p}{p^2 + \omega^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

$$c. \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\omega)t} + e^{-(p+i\omega)t} dt$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right] = \frac{1}{2} \frac{p+i\omega + p-i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$d. \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\omega)t} - e^{-(p+i\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right] = \frac{1}{2i} \frac{p+i\omega - p+i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$e. \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-1)t} dt = \left[ \frac{1}{p-1} e^{-(p-1)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-1} \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > 1$$

$$f. \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} dt = \left[ -\frac{1}{p+1} e^{-(p+1)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+1}$$

$$3. a. f(t) = \cos t : \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{it} + e^{-it}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i)t} + e^{-(p+i)t} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(p) > 0$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right] = \frac{1}{2} \frac{p+i + p-i}{p^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$b. g(t) = \sin t : \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{it} - e^{-it}) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(p-i)t} - e^{-(p+i)t} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(p) > 0$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right] = \frac{1}{2i} \frac{p+i - p+i}{p^2 + 1} = \frac{1}{2i} \frac{2i}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

### Fonctions puissances $t \mapsto t^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$n = 1$  Considérons la fonction  $f_1(t) = tU(t)$ , on obtient :  $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$

On peut procéder à une intégration par parties, en posant :  $u(t) = t$  et  $v'(t) = e^{-pt}$ , on obtient :  $u'(t) = 1$  et

$$v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt} \text{ d'où ( si } p \neq 0 \text{ )}. \int_0^x t e^{-pt} dt = \left[ \frac{-t e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{1}{p} \int_0^x e^{-pt} dt = \left[ \frac{-t e^{-pt}}{p} - \frac{1}{p} \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^x = e^{-px} \left( \frac{-x}{p} - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2}$$

On obtient pour  $p > 0$  :  $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}$ .

$n = 2$  :  $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt$ . On peut procéder à une intégration par parties, en posant :  $u(t) = t^2$  et  $v'(t) = e^{-pt}$ , on

obtient :  $u'(t) = 2t$  et  $v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$  d'où ( si  $p \neq 0$  ).

$$\int_0^x t^2 e^{-pt} dt = \left[ \frac{-t^2 e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{2}{p} \int_0^x t e^{-pt} dt = \left[ \frac{-t^2 e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{2}{p} \int_0^x t e^{-pt} dt, \text{ on remarque que } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-px} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2} \text{ d'où : } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{2}{p^3}$$



On sait déjà que pour  $p > 0$ ,  $F_0(p) = \frac{1}{p}$ ;  $F_1(p) = \frac{1}{p^2}$  et  $F_2(p) = \frac{2}{p^3}$ . On peut procéder à une intégration par

parties, en posant :  $u(t) = t^n$  et  $v'(t) = e^{-pt}$ , on obtient :  $u'(t) = nt^{n-1}$  et  $v(t) = -\frac{1}{p} e^{-pt}$  d'où ( si  $p \neq 0$  ).

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-pt} dt = \left[ \frac{-t^n e^{-pt}}{p} \right]_0^x + \frac{n}{p} \int_0^x t^{n-1} e^{-pt} dt = \frac{-x^n e^{-px}}{p} + \frac{n}{p} \int_0^x t^{n-1} e^{-pt} dt ; \text{ si } p > 0 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-px} = 0$$

Donc l'intégrale  $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt$  est convergente et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = F_n(p)$ .

supposons désormais  $p > 0$ .  $F_n(p) = \frac{n}{p} F_{n-1}(p)$  et  $F_{n-1}(p) = \frac{n-2}{p} F_{n-2}(p)$ ;  $F_{n-2}(p) = \frac{n-2}{p} F_{n-3}(p), \dots$

$F_3(p) = \frac{3}{p} F_2(p)$  et  $F_2(p) = \frac{2}{p} F_1(p) = \frac{2}{p^3}$  donc on déduit de proche en proche que

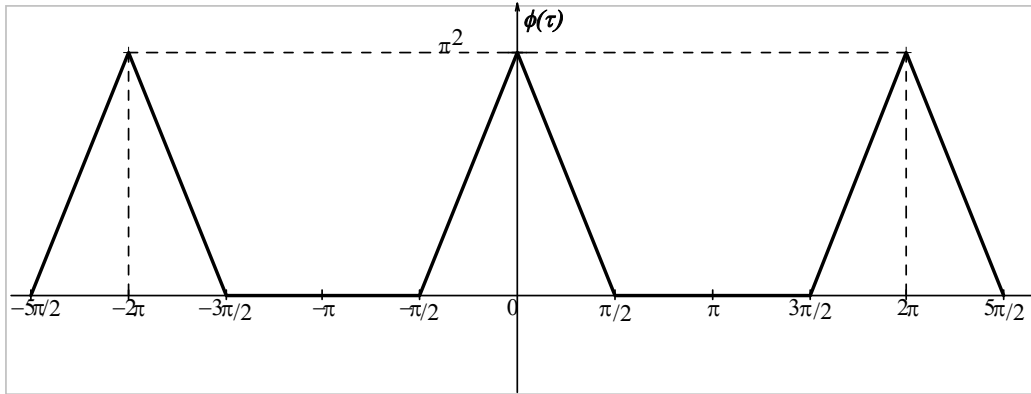
$$F_n(p) = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)}{p} \times \frac{(n-2)}{p} \times \frac{3}{p} \times \frac{2}{p} F_1(p), \text{ donc pour tout } p > 0, F_n(p) = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)}{p} \times \frac{(n-2)}{p} \times \frac{3}{p} \times \frac{2}{p} \times \frac{1}{p^2}$$

On admet que  $n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1 = n!$  (factoriel  $n$ ). Nous admettrons qu'on obtient ainsi de proche en proche les transformées de Laplace des fonctions  $t \mapsto t^n$ . On conclut que  $F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot n \in \mathbb{N}$ .

$$F_n(p+a) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} ; p+a > 0 \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et } n=1 : F_1(p+a) = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

### Exercice 2

1°.



2°. On pose  $u(t) = \pi^2 - 2\pi t$  ;  $u(t) = -2\pi$  et  $v'(t) = \cos(nt)$  ;  $v(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$

$$I = \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt = \left[ \frac{(\pi^2 - 2\pi t) \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} (-2\pi) (\sin(nt)) dt$$

$$I = 0 + \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin(nt) dt = \frac{2\pi}{n} \left[ \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{n^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

**Fomesoutra.com**  
ça soutra !  
Docs à portée de main

3°. La fonction  $f$  est paire donc  $b_n = 0$ . Or  $\varphi(t) = 0$  si  $t \in [-\pi; -\pi/2] \cup [\pi/2; \pi]$ ,

$$b. a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi(t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \pi^2 t - \pi t^2 \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4} \right] = \frac{\pi^2}{4}$$

$$c. a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\pi/2} \varphi(t) \cos(nt) dt + \int_{-\pi/2}^0 \varphi(t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \cos(nt) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi^2 - 2\pi t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi} \times \frac{2\pi}{n^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) = \frac{4}{n^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$d. \text{ Si } n \text{ est pair on a : } a_{2p} = \frac{4}{(2p)^2} \left( 1 - \cos(p\pi) \right) = \frac{1}{p^2} (1 - (-1)^p)$$

$$e. a_{4k} = \frac{4}{(4k)^2} \left( 1 - \cos(2k\pi) \right) = 0 \quad \text{et} \quad a_{4k+2} = \frac{4}{(4k+2)^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{4k+2}{2}\pi\right) \right) = \frac{1}{(2k+1)^2} \left( 1 - \cos((2k+1)\pi) \right) = \frac{2}{(2k+1)^2}$$

$$f. a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{2p+1}{2}\pi\right) \right) = \frac{4}{(2p+1)^2} \left( 1 - \cos\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{4}{(2p+1)^2}.$$

### Exercice 3

1.  $f$  est dérivable sur  $[0; \pi]$  et  $f'(t) = 2 \sin(2t)$

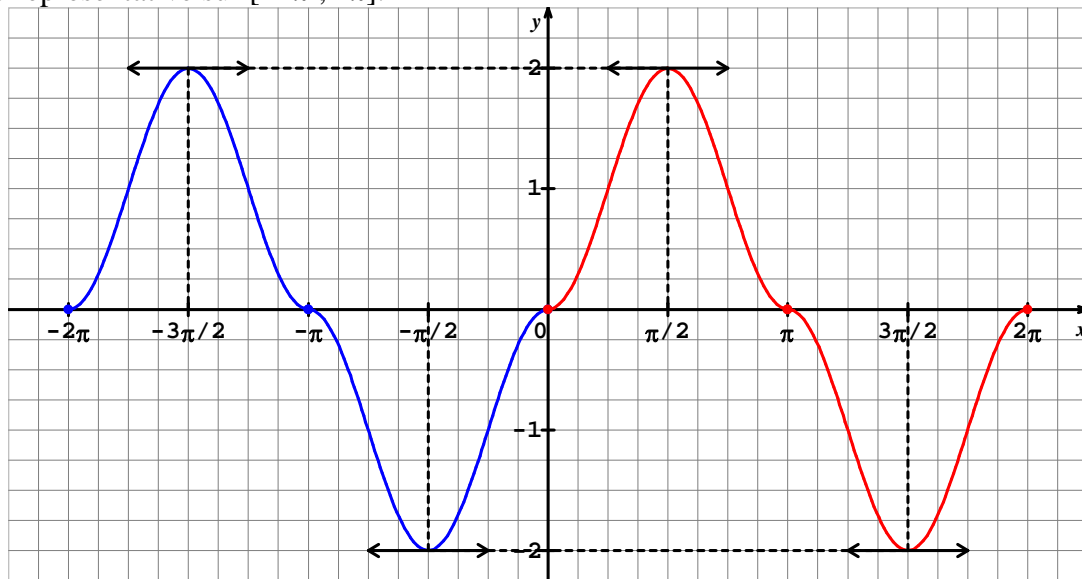
$$f'(t) = 0 \text{ équivaut à } \sin 2t = 0 \quad \sin 2t = \sin 0 \quad t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } t = \frac{\pi}{2} \text{ sur } [0; \pi].$$

Si  $t \in [0; \pi/2]$   $2t \in [0; \pi]$  et  $\sin(2t) \geq 0$  sur  $[0; \pi]$  donc  $\sin(2t) \geq 0$  sur  $[0; \pi/2]$ .

Si  $t \in [\pi/2; \pi]$   $2t \in [\pi; 2\pi]$  et  $\sin(2t) \leq 0$  sur  $[\pi; 2\pi]$  donc  $\sin(2t) \leq 0$  sur  $[\pi/2; \pi]$

$t$	0	$\pi/2$	$\pi$
$f'(t)$	0	+	-
$f(t)$	0	2	0

Courbe représentative sur  $[-2\pi ; 2\pi]$ .



$$2. E_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt$$

$$E_f^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{3}{2}t - \sin(2t) + \frac{1}{8}\cos 4t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \times \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2} \text{ donc } E_f = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$3. I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 -f(-t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = 0$$

$f$  est une fonction impaire donc tous les  $a_n$  sont nuls.

$$b. b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2t)) \sin(2t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t) \sin(2t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(4t)}{2} dt$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = 0$$

$$c. \text{ soit } n \geq 1 \text{ et } n \neq 2 : \sin(nt) \cos(mt) = \frac{1}{2} [\sin((n+m)t) + \sin(n-m)t]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2t)) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t) \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+2)t + \sin(n-2)t] dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{2}{n}\cos(nt) + \frac{1}{(n+2)}\cos((n+2)t) + \frac{1}{(n-2)}\cos((n-2)t) \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-1}{n}(\cos(n\pi) - 1) \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{(n+2)}\cos(n+2)\pi + \frac{1}{(n-2)}\cos(n-2)\pi \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{(n+2)}\cos 0 + \frac{1}{(n-2)}\cos 0 \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-1}{n}((-1)^n - 1) \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)} \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n-2)} \right)$$

Si n est pair  $b_{2p} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-1}{2p} \left( (-1)^{2p} - 1 \right) \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{(2p+2)} + \frac{1}{(2p-2)} \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{(2p+2)} + \frac{1}{(2p-2)} \right) = 0$

Si n est impair  $n = 2p + 1$

$$b_{2p+1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-1}{(2p+1)} \left( (-1)^{2p+1} - 1 \right) \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^{2p+3}}{2p+3} + \frac{(-1)^{2p-1}}{2p-1} \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{(2p+3)} + \frac{1}{(2p-1)} \right) = \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{2p+3} + \frac{2}{2p-1} \right)$$

$$= \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{2(2p-1) + 2(2p+3)}{(2p+3)(2p-1)} \right) = \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{4p-2+4p+6}{(2p+3)(2p-1)} \right) = \frac{4}{(2p+1)\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{2p+1}{(2p+3)(2p-1)} \right)$$

$$= \frac{4(2p+3)(2p-1)}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi} - \frac{4(2p+1)^2}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi} = 4 \frac{(2p+3)(2p-1) - (2p+1)^2}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi} = 4 \frac{4p^2 + 4p - 3 - 4p^2 - 4p - 1}{(2p+1)(2p+3)(2p-1)\pi}$$

$$b_{2p+1} = \frac{-16}{(2p+1)\pi((2p+1)^2 - 4)}$$

**Fomesoutra.com**  
*ça soutra !*  
**Docs à portée de main**

4.  $b_1 = \frac{-16}{\pi(1-4)} = \frac{16}{3\pi}$  ;  $b_3 = \frac{-16}{3\pi(9-4)} = \frac{-16}{15\pi}$  ;  $b_5 = \frac{-16}{5\pi(25-4)} = \frac{-16}{105\pi}$  ;  $b_7 = \frac{-16}{7\pi(49-4)} = \frac{-16}{315\pi}$

**Exercice 4**

1. Soit n un entier naturel non nul .  $I_n = \int_0^\pi (t - \pi) \sin(nt) dt$  . on effectue une intégration par parties :

$u(t) = t - \pi$  ;  $u'(t) = 1$  et  $v'(t) = \sin(nt)$  ;  $v(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt)$  , donc pour tout  $n \geq 1$  , on a :

$$I_n = \int_0^\pi (t - \pi) \sin(nt) dt = \left[ -\frac{(t - \pi) \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt = 0 - \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2} [\sin(nt)]_0^\pi = -\frac{\pi}{n} \quad . \quad I_n = -\frac{\pi}{n} .$$

$A_n = \int_0^\pi (t - \pi)^2 \cos(nt) dt$  . on effectue une intégration par parties :

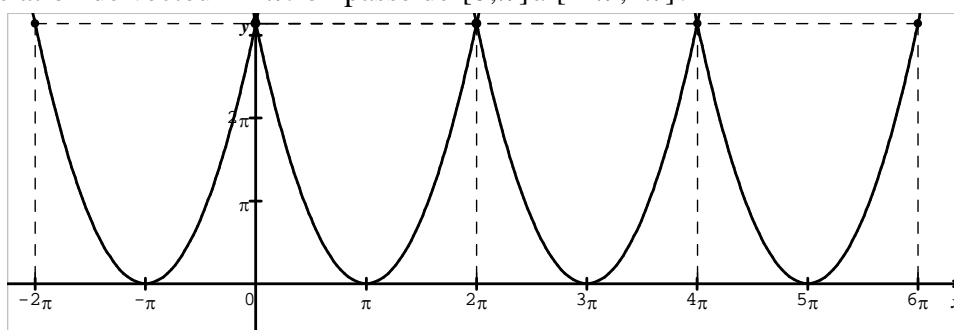
$u(t) = (t - \pi)^2$  ;  $u'(t) = 2(t - \pi)$  et  $v'(t) = \cos(nt)$  ;  $v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$  , donc pour tout  $n \geq 1$  , on a :

$$A_n = \int_0^\pi (t - \pi)^2 \cos(nt) dt = \left[ \frac{(t - \pi)^2 \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi 2(t - \pi) \sin(nt) dt = -\frac{2}{n} I_n , \text{ donc } A_n = \frac{2\pi}{n^2} .$$

2.a ) pour la représentation graphique de la fonction  $u$  sur  $[-2\pi; 6\pi]$  , on trace d'abord l'arc de la parabole correspondant à l'intervalle  $[0; \pi]$  sur lequel  $u(t)$  est un polynôme du second degré du type  $x^2$  avec  $x = t - \pi$  .

$u$  étant paire , on obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées l'arc de parabole correspondant à l'intervalle  $[-\pi; 0]$  .  $u$  admettant pour période  $2\pi$  , par translation de vecteur  $2\pi\vec{i}$  on passe de l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  à  $[-\pi + 2\pi; \pi + 2\pi] = [\pi; 3\pi]$  puis de  $[\pi; 3\pi]$  à  $[3\pi; 5\pi]$  et on complète jusqu'à  $6\pi$  .

De même par translation de vecteur  $-2\pi\vec{i}$  on passe de  $[0; \pi]$  à  $[-2\pi; -\pi]$  .



b/  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi u(t) dt$  . on lit sur le formulaire :  $a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$  pour une fonction périodique, de période T.

ici  $T = 2\pi$  et  $a = -\pi$  ;  $u$  étant paire donc  $\int_{-\pi}^0 u(t)dt = \int_0^{\pi} u(t)dt$ , donc  $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} u(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t)dt$

$$\text{Donc } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{3} (t - \pi)^3 \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} . \text{ d'où } a_0 = \frac{\pi^2}{3} .$$

**Fomesoutra.com**  
ça soutra !

Docs à portée de main

On calcule de même  $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) dt$  . pour tout entier non nul .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) dt ; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) dt , \text{ car les fonctions } u \text{ et } \cos \text{ sont paires, il en est de même}$$

pour  $t \mapsto u(t) \cos nt$  . donc  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(n\omega t) dt$  car  $u(t) = (t - \pi)^2$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$  .

Donc  $a_n = \frac{2}{\pi} A_n$  où  $A_n = \frac{2\pi}{n^2}$  d'après 1°. Donc  $a_n = \frac{4}{n^2}$  pour tout  $n$  entier naturel  $n \geq 1$  .

La fonction  $u$  étant paire ,  $b_n = 0$  pour tout  $n$  entier naturel  $n \geq 1$  .

3.  $U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2(t) dt$  , la fonction  $u$  étant paire , il en est de même de la fonction  $u^2$  . donc

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \pi)^4 dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(t - \pi)^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{5\pi} = \frac{\pi^4}{5} ; U_{eff}^2 \approx 19,483 .$$

### Exercice 5

1.)  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx$  , ( $n \in \mathbb{N}$  ) . on sait que :  $\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)]$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin(1+2n)x - \sin(2n-1)x) dx$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{-1}{1+2n} \right) \cos(1+2n)x + \left( \frac{1}{2n-1} \right) \cos(2n-1)x \right]_0^{\pi/2}$$

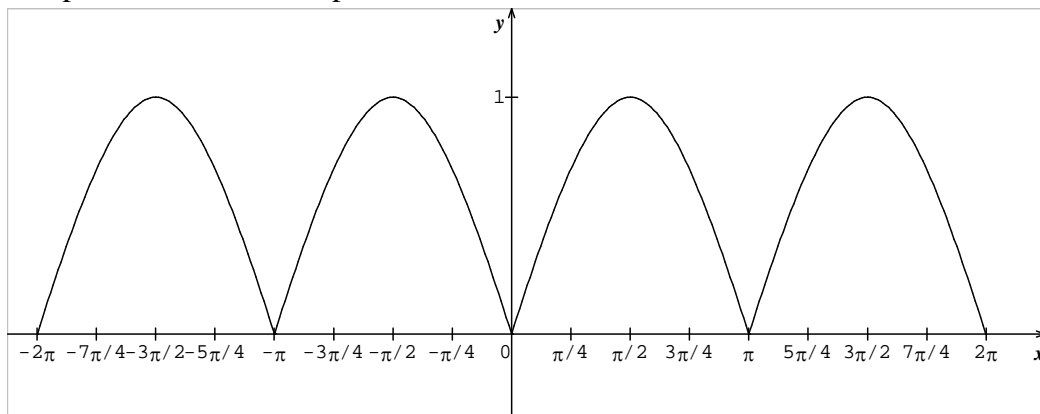
$$I_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{-1}{1+2n} \right) \cos(1+2n) \frac{\pi}{2} + \left( \frac{1}{2n-1} \right) \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} - \left( \left( \frac{-1}{1+2n} \right) \cos(1+2n)0 + \left( \frac{1}{2n-1} \right) \cos(2n-1)0 \right) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(1+2n) \frac{\pi}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos n\pi - \sin \frac{\pi}{2} \sin n\pi = 0 \\ \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} &= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos n\pi \cos \frac{\pi}{2} + \sin n\pi \sin \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \cos(1+2n) \frac{\pi}{2} = \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} = 0$$

$$I_n = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{-1}{1+2n} \right) + \left( \frac{1}{2n-1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{2n-1 - (2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \frac{-2}{4n^2-1} = -\frac{1}{1-4n^2} .$$

2.  $u(t + \pi) = |\sin(t + \pi)| = |-\sin t| = |\sin t| = u(t)$  et  $u(-t) = |\sin(-t)| = |-\sin t| = |\sin t| = u(t)$  ; Donc  $u$  est bien  $\pi$  - périodique et paire.

b. lorsque  $t \in [0; \pi]$  :  $u(t) = |\sin t| = \sin t$  puisque  $\sin t > 0$  sur  $[0; \pi]$  . sur cet intervalle la courbe  $C$  associée à  $u$  est la courbe représentative de la fonction sinus . comme  $u$  est  $\pi$  - périodique, la courbe représentative sur  $[-\pi; 2\pi]$  est obtenue par translation de  $\pi \vec{i}$  puis de  $-\pi \vec{i}$  de l'élément  $C$  .



c. comme la fonction  $u$  est paire, on a donc  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (1+1) = \frac{2}{\pi} \text{ puisque la fonction } f \text{ est paire}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \cos(2nt) dt = \frac{2}{\pi} \left( 2 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos(2nt) dt \right) \text{ puisque la fonction à intégrer est paire.}$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-4n^2}.$$

$$\text{b. } a_0 = \frac{2}{\pi}; \quad a_1 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-4} = \frac{-4}{3\pi}; \quad a_2 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-16} = \frac{-4}{15\pi}; \quad a_3 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-36} = \frac{-4}{35\pi}$$

$$a_4 = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1-64} = \frac{-4}{63\pi}.$$

$$3. U_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1-\cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

### Exercice 6

soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t-1 \text{ pour } t \in [0;2] \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est périodique de période } 4 \end{cases}$$

2°)

$$f_e^2 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f^2(t) dt = \frac{2}{4} \int_0^2 f^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} (t-1)^3 \right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

3°) a. puisque  $f$  est une fonction paire,  $b_n$  est nul.

$$\text{b. on a : } a_0 = \frac{1}{4} \times 2 \int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{(t-1)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{4} (1-1) = 0.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (t-1) \cos n \left( \frac{n\pi t}{2} \right) dt = \int_0^2 (t-1) \cos \left( \frac{n\pi t}{2} \right) dt.$$

On intègre par parties, en posant :  $u(t) = t-1$  ;  $u'(t) = 1$  et  $v'(t) = \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) t$  ,  $v(t) = \frac{2}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) t$ .

$$a_n = \int_0^2 (t-1) \cos \left( n \frac{\pi}{2} t \right) dt = \left[ \frac{2(t-1)}{n\pi} \sin \left( n \frac{\pi}{2} t \right) \right]_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \left( n \frac{\pi}{2} t \right) dt = 0 - \frac{2}{n\pi} \left[ -\frac{2}{n\pi} \cos \left( n \frac{\pi}{2} t \right) \right]_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1)$$

Deux cas :

1.  $n$  est pair, on pose  $n = 2p$  où  $n \in \mathbb{N}$   $a_{2p} = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(2p\pi) - 1) = 0$ .

2.  $n$  est impair, on pose  $n = 2p+1$  où  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2 \pi^2} (\cos((2p+1)\pi) - 1) = \frac{4}{(2p+1)^2 \pi^2} (-1-1) = -\frac{8}{(2p+1)^2 \pi^2}.$$

