TP- CALCULS INTEGRALES MATHEMATIQUES BTS1 INDUSTRIEL 2006-2007

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f : $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$

Démontrer que le développement limité d'ordre 4 la fonction Arc tan est : $\arctan t = t - \dfrac{t^3}{3} + t^4\varepsilon(t)$

2. Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f : $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

Démontrer que le développement limité d'ordre 4 la fonction Arc sin est : $\arcsin t = -t + \dfrac{t^3}{6} + t^4\varepsilon(t)$

3 .Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f : $x \mapsto e^{-x}$.

Démontrer que le développement limité d'ordre 2 de la fonction g : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ est $1 - x + \dfrac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

En déduire que le développement limité d'ordre 2 de la fonction h : $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$ est $1 - 2x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x)$

4. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de la fonction f: $x \mapsto (x+1)\cos x$ est : $f(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

5. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 1 + x + x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

6. Soit f la fonction définie sur] – 1, 1] par : $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$. Démontrer que le développement limité d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

7. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{1 - x^2 + x^3}{(1+x)^2}$ est :

$f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$

8. Soit f la fonction définie sur   par $f(x) = (x-2)\ln(1-x)$. La courbe $\mathcal{C}$, de la figure est la courbe représentative de f. La droite $\mathcal{T}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

1°a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1-x)$.

b)En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$f(x) = 2x + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

2° Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à lu courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathcal{C}$ et T au voisinage de 0.

9. Soit f la fonction définie sur   par $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$:

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une l'équation de la tangente T à la courbe C:
   (b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2(1+x)}+\ln(1+x)$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$:

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
2. En déduire : a) une équation de la tangente T à la courbe C:
   b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur par $f(x)=(x+2)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
2. En déduire : a) une équation de la tangente T à la courbe C:
   b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur par $f(x)=(1+x)e^{-1/x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0 de $g(t)=(1+t)e^{t}$
2. En déduire, en posant $t=1/x$ que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   où a; b et c sont des réels que l'on déterminera.
3. En déduire : a) une équation de l'asymptote Δ à C vers $+\infty$
   b) la position de C par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$:

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 de
2. En déduire : (a) une équation de la tangente T à la courbe C:
   (b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}\,\ln(1+x)$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0

2. En déduire : a) une équation de la tangente T à la courbe C:
   b) la position de C par rapport à T au voisinage de 0

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x)=x^2\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. 1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0 de $g(t)=\ln(1-t)$
2. En déduire, en posant $t=1/x$ que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   où a; b et c sont des réels que l'on déterminera.
3. En déduire : a) une équation de l'asymptote Δ à C vers $+\infty$
   b) la position de C par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$

Corrigé

Dl4 de Arctan.

La fonction f définie sur IR par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ admet pour primitive la fonction Arctangente.

Le dl3 de f au voisinage de zéro est : $\dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^3\,\varepsilon\,(x)$

Le dl4 de la fonction arc tangente au voisinage de zéro est: Arctan t = Arctan (0) + $t - \dfrac{t^3}{3} + t^4\,\varepsilon\,(x)$,

On obtient : Arctan t = Arctan (0) + $t - \dfrac{t^3}{3} + t^4\,\varepsilon\,(x)$,

Développement limité d'ordre 4 de la fonction Arc sin.

Arc sin est la primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ qui s'annule en 0

$t \longmapsto -t^2 \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la composée de deux fonction $t \longmapsto -t^2$ et $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$

Développement limité d'ordre 3 : $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-0,5}$

•$(1+t)^{\alpha} = 1 + \dfrac{\alpha}{1\,!}t + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2\,!}t^2 + \ldots + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\,\varepsilon(t)$

Si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{\alpha}{1\,!} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2\,!} = \dfrac{-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{8}$; $\dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{3\,!} = \dfrac{-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}\times-\frac{5}{2}}{3\times2\times1} = -\dfrac{15}{3\times2^4} = \dfrac{5}{16}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \dfrac{1}{2}\,t + \dfrac{3}{8}t^2 - \dfrac{5}{16}t^3 + t^3\,\varepsilon(t)$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-0,5} = 1 - \dfrac{1}{2}(-t^2) + \dfrac{3}{8}(-t^2)^2 - \dfrac{5}{16}\,(-t^2)^3 + (-t^2)^3\,\varepsilon(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{8}t^4 + \dfrac{5}{16}t^6 + t^6\,\varepsilon(t)$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \dfrac{t^2}{2} + t^3\,\varepsilon(t)$.

On intègre : Arc sin t = Arc sin 0 $- t + \dfrac{t^3}{6} + t^4\,\varepsilon(t)$ donc le dl4 de Arcsin t = $- t + \dfrac{t^3}{6} + t^4\,\varepsilon(t)$

$\boxed{1}$ $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\ \varepsilon1(x)$

$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha\,t + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}t^2 + t^2\ \varepsilon2(t)$

$(1+t)^{-1/2} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{8}t^2 + t^2\ \varepsilon3(t)$ donc : $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}} = 1 - \dfrac{(2\,x)}{2} + \dfrac{3}{8}(2\,x)^2 + x^2\,\varepsilon4(x) = 1 - x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\ \varepsilon4(x)$

$h(x) = \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right)\left(1 - x + \dfrac{3}{2}x^2\right) + x^2\,\varepsilon5(x) = 1 - x + \dfrac{3}{2}x^2 - x + x^2 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon6(x) = 1 - 2\,x + 3\,x^2 + x^2\,\varepsilon6(x)$

$\boxed{2}$ $\ln\,(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + t^3\,\varepsilon(t)$ donc $\ln\,(1-x) = (-x) - \dfrac{(-x)^2}{2} + \dfrac{(-x)^3}{3} + (-x)^3\,\varepsilon(-x) = - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon1(x)$

$f(x) = (x^2 + x + 1)\left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) + x^3\ \varepsilon2(x) = -x^3 - x^2 - \dfrac{x^3}{2} - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x) = -x - \dfrac{3\,x^2}{2} - \dfrac{11\,x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x)$

$\boxed{3}$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\,\varepsilon(x)$

$f(x) = (1+x)\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) + x^3\,\varepsilon1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + x^3\,\varepsilon(x)$

$\boxed{1}$ **Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \longmapsto \cos x$. En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction f : $x \longmapsto (x^2 + x + 1)\cos x$ est : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3\,\varepsilon(x)$.**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\,\varepsilon(x)$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3\,\varepsilon(x) = x^2 + x - \frac{x^3}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\,\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3\,\varepsilon(x).$$

$\boxed{2}$ **Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{(1+x)^2}$. En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction f : $x \longmapsto \frac{1 - x^2 + x^3}{(1+x)^2}$ est : $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$.**

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + x^3\,\varepsilon(x).$$

$$\frac{1 - x^2 + x^3}{(1+x)^2} = (1 - x^2 + x^3)(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3) + x^3\,\varepsilon(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 - x^2 + 2x^3 + x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 - x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$$

$\boxed{3}$ **Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction : $x \longmapsto e^x$. En déduire que le développement limité d'ordre 3 de la fonction f : $x \longmapsto 3(x^2 + 1) - 2e^x$ est : $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x)$.**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x) \qquad 3(x^2 + 1) - 2e^x = 3(x^2 + 1) - 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + x^3\,\varepsilon(x)$$

$$= 3x^2 + 3 - 2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x)$$

$\boxed{4}$ **Le plan est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)\ln(1 - x)$.**
La courbe $\mathscr{C}$, de la figure est la courbe représentative de f. La droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
1°a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \longmapsto \ln(1 - x)$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x)$$

b)En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est : $f(x) = 2x + \frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x)$

$$(x - 2)\ln(1 - x) = (x - 2)\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + x^3\,\varepsilon(x) = -x^2 - \frac{x^3}{2} + 2x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x) = 2x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

2° Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ au voisinage de 0.

Equation : $y = 2x$. position donné par le signe de $\frac{x^3}{6}$. $\mathscr{C}$ est audessus sur $\mathbb{R}_+$ et au dessous sur $\mathbb{R}_-$

$\boxed{5}$ **Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ On ne sait pas calculer une primitive de f.**

1° a) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 des fonctions $x \longmapsto e^{2x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$

$$e^{2x} = e^x = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$$

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x)$

$$\frac{e^{2x}}{1+x} = \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{2x^3}{3}\right)(1 - x + x^2 - x^3) + x^3\,\varepsilon(x)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + 2x - 2x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{2x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\,\varepsilon(x)$$