Sujets

Exercice 1

1.Soit le signal *f, dit « dent de scie »* définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π, telle que : $f(t)=t$ si $t\in[-\pi;\pi[$.

L'énergie E transportée par le signal est donnée par la formule : $E^2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt$

Représenter la fonction *f* sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$, puis calculer *E*.

2.On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=2\sin t-\sin(2t)$.

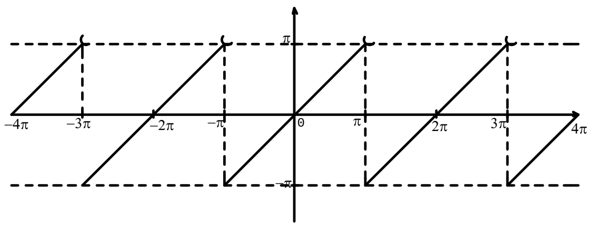
a. Prouver que g est une fonction impaire, de période 2π .

b. Prouver que $g'(t)=2\left(1-\cos t\right)\left(1+2\cos t\right)$.Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0;\pi]$.

c. Représenter sur un même graphique les fonctions *f* et *g* sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Corrigé

1. La représentation graphique de *f* a été obtenue en représentant la fonction $t\mapsto t$ sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$ et en dupliquant le segment obtenu par translations de vecteurs $\pm 2\pi\vec{i}$.



2.a. pour tout t ,

$g(-t)=2\sin(-t)-\sin(-2t)=-2\sin t+\sin(2t)=-g(t)$ et

$g(t+2\pi)=2\sin(t+2\pi)-\sin(2(t+2\pi))=2\sin t-\sin(2t)=g(t)$,

donc g est paire de période 2π . Il suffit donc d'étudier g sur un intervalle d'amplitude π , par exemple $[0;\pi]$.

c

$g'(t)=2\cos t-2\cos(2t)=2\cos t-2(2\cos^2 t-1)=-4\cos^2 t+2\cos t+2$

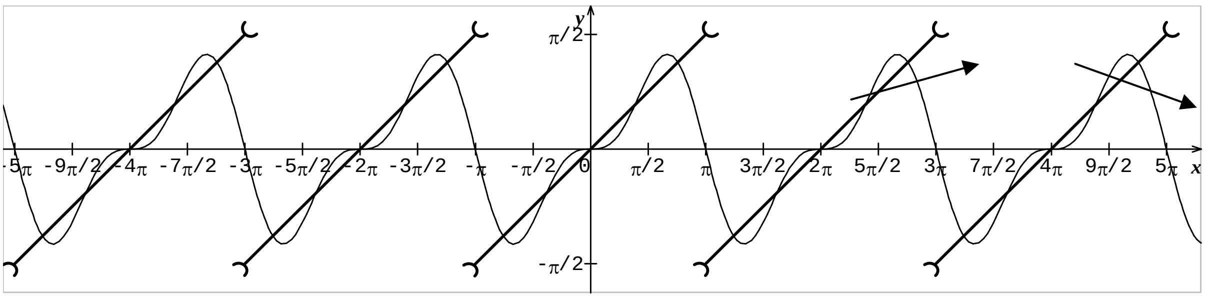
$2\left(1-\cos t\right)\left(1+2\cos t\right)=2(1+2\cos t-\cos t-2\cos^2 t)=2+2\cos t-4\cos^2 t$, on a donc bien

$g'(t)=2\left(1-\cos t\right)\left(1+2\cos t\right)$. $g'(t)=0$ signifie $2\left(1-\cos t\right)\left(1+2\cos t\right)=0$ c'est-à-dire $\cos t=1$ ou $\cos t=-\dfrac{1}{2}$:

$t=0$ ou $t=\dfrac{2\pi}{3}$ sur $[0;\pi]$. D'où le tableau de variation.

t	0		$2\pi/3$		π
$g'(t)$	0	+	0	–	-4
$g(t)$	0		$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$		0

La courbe représentative de g



1.On vérifie que pour tout t réel : $f(-t)=\left|\sin(-2t)\right|=\left|\sin(2t)\right|=f(t)$

$f(t+\dfrac{\pi}{2})=\left|\sin 2\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\sin\left(2t+\pi\right)\right|=\left|\sin\left(2t+\pi\right)\right|=\left|-\sin\left(2t\right)\right|=\left|\sin\left(2t\right)\right|=f(t)$.

f est bien un fonction périodique de période $\pi/2$ et paire .

2 - On considère un signal modélisé par la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=\left|\sin t\right|$.

a) Montrer que la fonction u est périodique de période $\pi/2$ et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction u , pour $t\in[-\pi,2\pi]$ (unité graphique : 2 cm).

a. $u(t+\pi/2)=\left|\sin 2(t+\pi/2)\right|=\left|\sin(2t+\pi)\right|=\left|-\sin 2t\right|=\left|\sin 2t\right|=u(t)$ et $u(-t)=\left|\sin(-2t)\right|=\left|-\sin 2t\right|=\left|\sin 2t\right|=u(t)$;

Donc u est bien $\pi/2$ périodique et paire.

b. lorsque $t\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$ $f(t)=\left|\sin(2t)\right|=\sin(2t)$, puisque $\sin(2t)>0$ sur $[0;\pi/2]$.sur cet intervalle la courbe C associée à f est la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \sin(2t)$ .comme f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$,

la courbe sur $[-\pi;\pi]$ est obtenue par translation de $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ puis $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$ de la courbe C.