

Exercice 1

- a. $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$ donc $f(x) = e^{ax}$ est une solution de l'équation $y' = ay$
- b. $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$, donc $h(x) = C$ où C est une constante réelle.
- c. $h(x) = C = g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x) = Ce^{ax}$.
2. $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$ si

$$f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a \sin x + b \cos x = 2(a \cos x + b \sin x) + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{5}; a = \frac{-2}{5}.$$

$y' = 2y$ a pour solution $y = Ce^{2x}$. f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} f' = 2f + \cos x \\ f_0' = 2f_0 + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow f' - f_0' = 2(f - f_0), \text{ soit } f - f_0 \text{ solution de } (E_0)$$

Les solutions de (E) sont données par $f - f_0 = Ce^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{-2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right) + Ce^{2x}$.

$$f(\pi/2) = \left(\frac{-2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + Ce^{\pi} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-1}{5} e^{-\pi}.$$